

TULLIO LEVI-CIVITA

IL PROBLEMA DEGLI n -CORPI IN RELATIVITÀ GENERALE



Cv

Introduzione, traduzione e note a cura di
Franco Cardin, Sara Di Ruzza e Leonardo Donà

PADOVA
UP



P A D O V A U N I V E R S I T Y P R E S S

Prima edizione 2019, Padova University Press

Titolo originale

IL PROBLEMA DEGLI n -CORPI IN RELATIVITÀ GENERALE

© 2019 Padova University Press

Università degli Studi di Padova

via 8 Febbraio 2, Padova

www.padovauniversitypress.it

Progetto grafico

Padova University Press / Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

ISBN 978-88-6938-171-3

Stampato per conto della casa editrice dell'Università degli Studi di Padova
Padova University Press

TULLIO LEVI-CIVITA

IL PROBLEMA DEGLI n -CORPI
IN
RELATIVITÀ GENERALE



INTRODUZIONE, TRADUZIONE E NOTE A CURA DI
FRANCO CARDIN, SARA DI RUZZA E LEONARDO DONÀ

Nel frontespizio: illustrazione di Guido Scarabottolo, *Il Sole 24 Ore*,
n. 319, pag. 27, DOMENICA 20 NOVEMBRE 2016.

Copyright © Il Sole 24 Ore, riproduzione vietata.

*Sara Di Ruzza is supported by the ERC Project “Stable and Chaotic
Motions in the Planetary Problem”.*

Introduzione

Le attuali versioni del “Problema degli n corpi in relatività generale”

Questa riproposizione in italiano dell'ultimo lavoro di Tullio Levi-Civita (1873-1941) nasce da una esigenza culturale forte. Nel 2018 Padova e la sua Università hanno celebrato il loro grande scienziato con un importante convegno, accompagnato dalla ristampa di una selezione di suoi lavori, comprendente la sua tesi di laurea autografa¹. L'ultimo suo lavoro scientifico, “Le problème des n corps en relativité générale”, fu redatto in francese, e per le note vicende risalenti all'abominia fascista delle leggi razziali, fu stampato solo postumo², nel 1950, a cura dell'Accademia delle Scienze di Parigi. La lingua francese rappresentava per Tullio Levi-Civita lo strumento veicolare internazionale privilegiato. Basti pensare al memorabile lavoro del 1900, sollecitato da Felix Klein (1849-1925), e scritto con il suo maestro Gregorio Ricci Curbastro (1853-1925), sulle basi del Calcolo Differenziale Assoluto³, oggi chiamato ‘calcolo tensoriale’, grammatica della geometria differenziale moderna. Come richiamano puntualmente Pietro Nastasi e Rossana Tazzioli, in un profondo pregevole lavoro storico⁴ che in

¹Tullio Levi-Civita, *Sugli invarianti assoluti*. Tre volumi, a cura di Franco Cardin, Franco Rampazzo e Luigi Salce. Padova University Press, Padova, 2018.

²Ricordiamo che Tullio Levi-Civita, svilto dal regime e abbandonato dall'accademia italiana, mancò il 29 dicembre 1941. La sua morte fu ricordata in Italia solamente dall'Istituto Lombardo e dall'Accademia Pontificia. Nel Regno Unito, reduce dalle bombe italo-tedesche della ‘battaglia d’Inghilterra’, alcune Accademie britanniche –la Royal Society of Edinburgh e la Edinburgh Mathematical Society– scrissero commoventi necrologi in suo onore; li possiamo leggere nel sito <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Levi-Civita.html>.

³Gregorio Ricci Curbastro, Tullio Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, *Mathematische Annalen* 54 (1-2): 125-201, 1900.

⁴Pietro Nastasi, Rossana Tazzioli, *Toward a scientific and personal biography of Tullio Levi-Civita (1873-1941)*. *Historia Math.* 32 (2005), no. 2, 203-236.

queste pagine sarà più volte richiamato, l'interesse di Tullio Levi-Civita per il problema ad n corpi in Relatività Generale iniziò sicuramente prima delle leggi razziali del 1938; in tale articolo è delineato con chiarezza il contesto storico ed anche in parte il contenuto conoscitivo dell'edificio costruito attorno a tale problema: ne riporteremo ampi stralci in queste pagine introduttive.

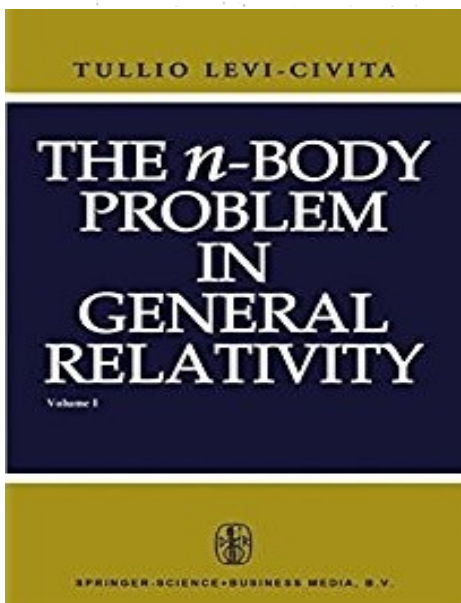
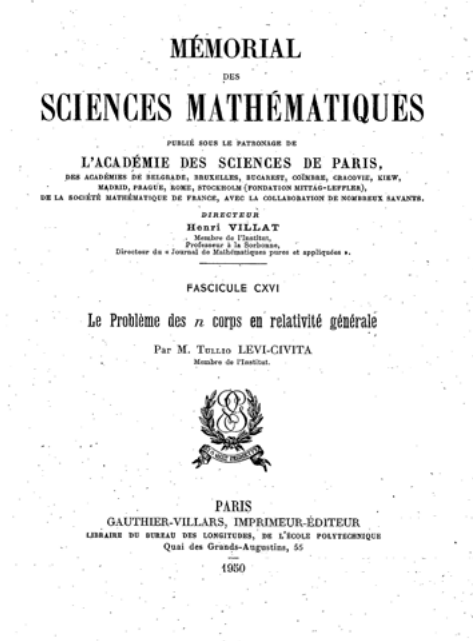
Dall'originale versione francese si giunse nel 1964 ad una traduzione in inglese negli Stati Uniti. Questa, sebbene scientificamente virtuosa, proprio perché metteva a disposizione di una più ampia comunità internazionale l'ultima prova di Tullio Levi-Civita, appare per alcuni aspetti problematica, con qualche fraintendimento in quel rigore che sarebbe auspicato in imprese editoriali di tali proporzioni. Si può ritenere che tale debolezza editoriale vada ascritta all'impostazione editoriale più che al traduttore stesso, Arthur J. Knodel, professore di francese alla University of Southern California, un uomo di lettere, e solo tra le righe si ritrovano suoi ringraziamenti ad un fisico, Jack C. Miller, per qualche amichevole consultazione⁵. Per questa traduzione non avvenne ciò che invece accadde più efficacemente per la traduzione, sempre dal francese all'inglese, del volume di Louis De Broglie "Non-Linear Wave Mechanics: a Causal Interpretation", operata dallo stesso Arthur J. Knodel nel 1960, ma che in quell'occasione fu svolta congiuntamente al fisico Jack C. Miller, formalmente editorialmente coinvolto.

È universale collocare gli scritti scientifici e filosofici di Galileo Galilei, a buon diritto, nella letteratura italiana. La gran parte degli scritti di Tullio Levi-Civita fu in italiano, e un'attenta lettura di essi, proprio sotto il profilo letterario, ci restituisce un altro maestro della nostra lingua: invitiamo, un testo per tutti, alla lettura di 'Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova meccanica'⁶, per proporre di affiancarlo agli scrittori scientifici che hanno un posto nella nostra letteratura. Questa traduzione desidera esser anche un omaggio all'affezione di Levi-Civita per la sua lingua madre. Amiamo pensare che questo centinaio di pagine pregiate, redatte quasi certamente dopo il suo umiliante allontanamento dall'università, siano state scritte con l'altra grande motivazione di offrire un definitivo testamento scientifico. Non esiste tuttora una versione italiana di questo piccolo capolavoro che qui proponiamo. Voglia-

⁵ *The translator wishes to acknowledge his indebtedness to his close friend, Dr. Jack C. Miller of the Physics Department of Pomona College (Claremont, California). Without Dr. Miller's interest and knowledge, the present translation would hardly have been possible.*

⁶ Rend. del Sem. Mat. della Fac. di Sci. della R. Univ. di Roma, Vol. V, 1918-19, pp. 10-28.

mo cimentarci nel riempire questa lacuna, affrontando, con serenità e amore per il grande matematico, anche rischi editoriali come quelli sopra discussi.



Qualche riferimento storico

Motivazioni decisive che spinsero Levi-Civita a scrivere quest'ultimo lungo lavoro si possono ritrovare nelle lettere riportate e commentate nel citato articolo di Nastasi e Tazzioli, lettere tra Levi-Civita e colleghi coinvolti sul comune terreno di ricerca. Emerge con forza una pulsione del nostro per una definitiva risistemazione della materia che nel corso degli anni '30 aveva creato alcuni fraintendimenti⁷.

Ma torniamo indietro negli anni. Furono molto probabilmente i risultati di Paul Painlevé (1863-1933) ed altre grandi figure, come David Birkhoff (1884-1944), ad accendere ed alimentare l'interesse di Levi-Civita per il problema a n corpi classico, a cui si dedicò per oltre vent'anni. Basterebbe pensare alla sua regolarizzazione degli 'incontri ravvicinati' nei 3 corpi, che rimane tuttora la tecnica più efficace per lo studio delle singolarità nel caso piano. Di grande risonanza emergeva la dimostrazione del ben noto *Ultimo Teorema Geometrico di Poincaré*⁸ fornita da Birkhoff, con cui Levi-Civita ebbe un'intensa corrispondenza scientifica epistolare fin dal 1913, che documenta il progresso della ricerca sul problema dei 3 corpi in quegli anni. Levi-Civita abbracciò lo studio e la ricerca in teoria della stabilità, meccanica analitica e nel problema newtoniano dei 3 corpi, dopo il distacco dall'amata materia su cui si era formato, il calcolo differenziale assoluto, la cui sistemazione più alta – si veda la nota (3) – era stata accolta definitivamente con freddezza dalla comunità matematica internazionale. Nei primi 15 anni del '900 non ritornò più alla geometria differenziale, Ricci Curbastro quasi smise l'attività di ricerca: fu proprio l'incontro inatteso con l'opera di Albert Einstein (1879-1955), la relatività generale, che dette nuova spinta creativa al nostro. Nel 1916 concepì⁹ il *Trasporto Parallelo*, germe della potente teoria delle Connessioni su fibrati, e divenne successivamente il divulgatore internazionale matematico della relatività generale. È dall'inizio degli anni '30 che Levi-Civita rimane profondamente coinvolto nel

⁷In uno scambio di lettere tra Eddington, Clark e Robertson con Levi-Civita viene evidenziato un 'errore' compiuto dal nostro nel secondo articolo del 1937: 'Astronomical Consequences of the Relativistic Two-Body Problem', *American Journal of Mathematics*, Vol. 59, No. 2 (Apr., 1937), pp. 225-234.

⁸Il teorema garantisce l'esistenza di infinite soluzioni periodiche per il problema ristretto dei tre corpi.

⁹Tullio Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque*, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 42, 1917, pp. 173-205. Questa nota fu presentata alla rivista il 24 dicembre del 1916.

problema relativistico degli n corpi¹⁰. Dieci anni prima, figure come Albert Einstein, Wilhelm de Sitter (1872-1934), Johannes von Droste (1886-1963) e Karl Schwarzschild (1873-1916) avevano già ottenuto importanti risultati per il problema relativistico dei due corpi (moto di una massa infinitesimamente piccola nel campo di una data massa sferica). Come notò Marcel Brillouin (1854-1948) –lo troviamo nel testo di Lichnerowicz citato nella nota (10)– una delle difficoltà principali era quella di integrare le equazioni non lineari di campo e risolvere il problema delle singolarità di autointerazione, inevitabile in teoria dei campi. Non è infatti possibile semplificare le equazioni del moto introducendo un principio relativistico che giochi lo stesso ruolo del principio di azione e reazione newtoniano della Meccanica Classica. Emergeva la necessità di sviluppare un metodo generale di approssimazione al fine di produrre esplicite soluzioni entro un ordine prefissato.

Nel 1937 Levi-Civita pubblicò nell'*American Journal of Mathematics* il suo cruciale articolo 'The relativistic problem of several bodies', il primo su quella rivista in quell'anno. Era sostanzialmente il testo della sua lezione in occasione della Harvard Tercentenary Conference of Arts and Sciences tenuta nel settembre del 1936. Conteneva pure un'osservazione di Einstein in Appendice. Come scrive Lichnerowicz *... in questo articolo ha dedotto in maniera coerente e per la prima volta il sistema differenziale che descrive il moto dei centri di gravità degli n -corpi che tiene conto delle parti principali delle correzioni relativistiche*. Durante lo stesso anno e nella stessa rivista, Levi-Civita pubblicò pure il testo di una sua lezione tenuta all'università di Harvard, 'Astronomical consequences of the relativistic 2-body problem', ove applica il suo metodo e ottiene risultati rimarchevoli sulla cosiddetta accelerazione secolare. Inizia qui uno scambio di lettere tra Levi-Civita e Arthur

¹⁰La genesi e l'evoluzione del suo interesse sull'argomento non sono state molto studiate dal punto di vista storico, siamo consapevoli che il recentissimo volume:

Judith R. Goodstein, *Einstein's Italian mathematicians. Ricci, Levi-Civita, and the birth of general relativity*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018, pp. xvii+212,

ponga un definitivo rimedio alla carenza accennata. Negli anni passati forse un'eccezione fu fornita da uno scienziato militante:

André Lichnerowicz, *Le problème des n corps en relativité générale* et Tullio Levi-Civita, *Atti del Convegno internazionale celebrativo del centenario della nascita di Tullio Levi-Civita* (Roma, 17-19 dic. 1973), Accad. dei Lincei, Roma, 1975.

A. Lichnerowicz (1915-1998) fu matematico e fisico francese di origini polacche, noto per i suoi contributi alla geometria differenziale e alla fisica matematica.

Stanley Eddington¹¹ (1882–1944), il quale manifesta perplessità riguardo al metodo usato da Levi-Civita: in particolare, risultando i suoi calcoli diversi da quelli del nostro, lo invita ad esplicitare i passaggi. In una lettera (Cambridge, 21 marzo 1938) gli scrive:

Dear Professor Levi-Civita, I am sending you a copy of a paper, which I am proposing to publish in the Proceedings of the Royal Society, which treats the problem of the secular acceleration. As you know I was very interested in the problem. I have an exceptionally able student G.L. Clark, and some of the most vital parts of the paper, especially the discovery of de Sitter's error, are due to him. You will see that, contrary to your results, we find no secular acceleration; the various terms cancel out as shown in (8.4) of our paper¹². We think there must have been a numerical slip in your calculation which prevented the cancelling (see our comparison with your results after our equation (8.2)). I realise that it is not possible to arrive quickly at a definite judgement on an investigation; in which so much depends on accuracy in a very long algebraic calculation (...).

La risposta di Levi-Civita fu immediata (24 marzo), specificando che gli serviva più tempo per rivedere i suoi calcoli, e che stava lavorando ad un 'piccolo volume' sul problema relativistico di molti corpi:

Dear Professor Sir A. Eddington, (...) As you obviously think, I am enormously interested in this research and in the fundamental discrepancy concerning secular acceleration, which you find. I shall carefully examine all the matter, in order to detect the origin of the difference of our conclusions. Unfortunately I may never exclude some material mistake in my calculations, though I remember well that I have revised the whole investigation twice, at the interval of one year. Just in the next days I intended to resume it in order to prepare a detailed exposition to be printed as a little volume in the collection of Professor Villat "Mémorial des Sciences Mathématiques". Of course your paper is a strong stimulus to accelerate this work instituting first at all the comparison between my successive

¹¹Noto astrofisico inglese, fece numerose ricerche sulla teoria della relatività. Egli ebbe un importante ruolo nella divulgazione scientifica. Ad esempio fu grazie ad un suo articolo 'Report on the relativity theory of gravitation' che la nuova teoria di Einstein sbarcò in Inghilterra. Uno tra i suoi contributi più importanti all'astronomia fu la scoperta del limite di Eddington: la massima luminosità raggiungibile da una stella di massa M senza che essa perda gli strati più esterni della propria atmosfera. Importante la sua misurazione della deviazione della luce durante un'eclissi: fu il trionfo della Relatività Generale.

¹²Clark, G.L., Eddington, A., 1938. The problem of n bodies in general relativity theory. Proc. Roy. Soc. London Sect. A 166 (927), 465–475.

steps and yours (...).

Nel frattempo Levi-Civita prepara un manoscritto dal titolo ‘Secular acceleration of the mass center in the relativistic problem of 2-bodies’, dove tutti i calcoli appaiono sviluppati esplicitamente, affinché si potesse individuare quell’errore dichiarato. Tale articolo era pensato per l’*American Journal of Mathematics*, dedicato al centenario della nascita di George Williams Hill (1838-1914). Levi-Civita scrive:

I have re-examined my previous investigation concerning the secular acceleration of the center of gravity in the relativistic two-body problem, and I have reached the same numerical result as before. On the contrary, Professor Robertson, applying a quite different method due to Einstein, and independently, Sir Arthur Eddington and G.L. Clark, starting from the same differential equation as I, got the conclusion that (the adopted approximation being in all cases the same) this secular acceleration identically vanishes. I was obviously strongly impressed by such a discrepancy, which has significant tokens in my disfavour. I bring however myself to publish the details of my work, as I have now written down all intermediate passages, beginning from equations identical with those used by Eddington and Clark (which are fundamentally De Sitter’s, duly emended). It will be so possible to control the computations and therefore, in Eddington and Clark’s words, either to detect an error or to obtain further light on the nature of the phenomenon.

Quell’articolo tuttavia non potè esser inserito nel volume che celebrava il centennale di Hill, dato che quando Robertson ricevette la nota di Levi-Civita, il volume era già uscito. Comunque, in una circostanza fortuita, Robertson e Clark si ritrovarono assieme a Princeton, entrambi determinati a controllare i calcoli di Levi-Civita. Finalmente, unendo i loro sforzi, riuscirono a trovare l’errore, che Levi-Civita riconobbe¹³; tuttavia egli continuava ad aver fiducia nel suo metodo, che giudicava migliore di quello di Einstein. Quel testo non venne mai pubblicato: secondo Robertson *the thing was quite useless*. Il metodo (corretto) di Levi-Civita fu pubblicato solo nel 1950, quando il volu-

¹³ Anche il fisico Clifford M. Will, in un suo articolo del 2011, che sarà ripreso in seguito, sottolinea tale punto, specificando che Eddington e Clark videro subito che Levi-Civita aveva basato il citato testo del 1937 su degli errori di De Sitter; imperfezioni a cui accennerà lo stesso Levi-Civita, del resto, nella Prefazione del presente volume che qui riproponiamo. Un’approfondita analisi sui fraintendimenti che coinvolsero Levi-Civita, si può ritrovare nell’appendice D in T. Damour and G. Schäfer, *Higher-order Relativistic Periastron Advances and Binary Pulsars*, Il Nuovo Cimento, Vol. 101 B, N.2, Febbraio 1988.

me del Mémorial venne finalmente stampato¹⁴. In ogni caso, come osservò Lichnerowicz, Levi-Civita aveva ragione di ritenere il suo metodo *worthy of publication*: era davvero più fruttuoso e naturale rispetto al metodo di Robertson, come mostrò Vladimir Fock (1898-1974) nei suoi lavori pubblicati dal 1939 e negli anni seguenti, contenenti la versione finale della nuova meccanica relativistica¹⁵.

Nonostante l'interesse di Levi-Civita e di qualche suo sporadico allievo, le teorie relativistiche non ebbero inizialmente una forte espansione in Italia. Solo nel 1921, quando Einstein tenne alcune lezioni in Italia, la sua teoria divenne popolare, anche se più tra i matematici che tra i fisici: questi ultimi erano interessati maggiormente alla fisica sperimentale, altri si interessavano alla fisica teorica: all'altra dirompente teoria della meccanica quantistica. Inoltre, nelle università italiane, il calcolo vettoriale alla Burali-Forti era più apprezzato e studiato del calcolo tensoriale e dal momento che la teoria della relatività fonda le sue basi sulle operazioni tra tensori, questa fu un'altra ragione per la quale fece fatica a trovare studiosi interessati. Levi-Civita si spese con generosità per diffondere la teoria della relatività in Italia, e non solo: ad esempio nel 1921, a Barcellona, condusse lezioni pubbliche sulla Meccanica Classica e Relativistica, le cui traduzioni in italiano e tedesco furono pubblicate nel 1924¹⁶. Per comprendere la misura dell'apprezzamento dell'alta conoscenza della teoria che era attribuita a Levi-Civita, è illuminante una lettera di Augusto Righi al nostro: *Caro professore, presto dovrebbe riunirsi a Bruxelles il Comitato Internazionale di Fisica creato dal Sig. Solvay, di cui, non so per quale caso fortunato, sono stato chiamato a fare parte qualche mese fa. Si dovrà preparare la riunione estiva, fissare gli argomenti da trattare e scegliere i fisici da invitare. E' probabile che fra gli argomenti vi sia la Relatività. Quindi senz'altro ho pensato che il primo da invitare sarebbe lei (...).*

Deluso e senza speranze, con la dignità che sempre lo accompagnò, Levi-Civita scrisse le seguenti parole in una lettera (4 maggio 1939) ad uno dei suoi stu-

¹⁴Levi-Civita, T., 1950. Le problème des n corps en relativité générale. In: Mémorial des sciences mathématiques, vol. 116. Gauthier-Villars, Paris; è l'originale versione francese del presente volume.

¹⁵Fock, V. A., Sur le mouvement des masses finies d'après la théorie de gravitation einsteinienne. Acad. Sci. U.S.S.R. J. Phys. 1, (1939).

Fock, V. A., Sur les intégrales du centre de gravité dans le problème relativiste de deux masses finies. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 32, (1941).

¹⁶Levi-Civita, T., 1922a. *Questioni di Meccanica classica e relativista*. Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, Italian transl. Zanichelli, Bologna, 1924, German transl. Springer-Verlag, Berlin, 1924.

denti, Gheorghe Vranceanu, che divenne uno dei fondatori della scuola rumena di geometria differenziale:

Io faccio il pensionato, e sto fermo: non però nell'estate, sempreché le condizioni generali permettano una qualche mobilità. Come forse Lei sa, gli ebrei sono stati estromessi da qualsiasi partecipazione alla vita culturale italiana: in particolare quindi, non parteciperò al Convegno Volta, né sarò a Roma in Settembre.

I due lavori di Levi-Civita del 1937

Come sottolineato nella precedente breve rassegna storica, emergono notevoli i due seguenti lavori, intrecciati nella genesi dell'opera qui riproposta:

- The Relativistic Problem of Several Bodies,
- Astronomical Consequences of the Relativistic Two-Body Problem,

apparsi nell'*American Journal of Mathematics*, Vol. 59, rispettivamente No. 1 (Jan., 1937), pp. 9-22 e No. 2 (Apr., 1937), pp. 225-234.

Il primo lavoro fu presentato ad Harvard il 4 settembre 1936, in occasione della Harvard Tercentenary Conference of Arts and Sciences. Levi-Civita in quelle pagine motiva esplicitamente la ragione per cui evita di presentare i semplici, ma laboriosi calcoli legati alla determinazione della funzione Lagrangiana che governa il moto dei corpi: sarebbero stati tediosi per una presentazione orale. È proprio questo il lavoro in cui troviamo in Appendice un'osservazione di Einstein. Quell'osservazione riguarda un punto cruciale nell'impostazione del tensore energetico T_{ik} , che compare nelle equazioni di Einstein¹⁷ $G_{ik} - \frac{1}{2}Gg_{ik} = -\chi T_{ik}$ ($i, k = 0, 1, 2, 3$), cioè l'omissione, da parte di Levi-Civita, di un termine rappresentante la pressione isotropa, ma riconsiderato qui, nel presente volume riproposto.¹⁸

¹⁷In una notazione attuale le equazioni di Einstein risultano: $R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$, ove R_{ik} è il tensore di curvatura di Ricci, R la sua traccia, c la velocità della luce e G la costante di Cavendish.

¹⁸Si veda il capitolo *Sforzi interni e loro possibile trascurabilità nella presente approssimazione*.

Nel secondo lavoro, incentrato sul problema dei 2-corpi, troviamo invece il riferimento¹⁹ all'accelerazione secolare legata al centro di massa G del sistema binario di stelle considerato e al periastro rispetto alla stella con massa maggiore, accelerazione che risultava non annullarsi²⁰. Levi-Civita si spinse così in profondità da fornire anche un'indicazione sulla possibile osservazione astronomica di una differenza ΔV , incremento della velocità del centro di massa G del sistema binario di stelle, abbastanza grande da essere apprezzabile, qualora valgano alcune plausibili condizioni. Infatti, l'espressione che trovò per questa differenza di velocità lungo la linea apsidale, considerata nell'arco di un secolo, è:

$$\Delta V = 12,55 p \vartheta \frac{\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{m}{m_0} \frac{1}{(T^d)^2} \text{ km/sec},$$

dove p e ϑ sono espressioni che dipendono dalle masse delle due stelle m_0 ed m_1 , T^d è il periodo di rivoluzione della stella doppia espresso in giorni, m è la massa totale $m = m_0 + m_1$ ed ϵ è una costante che rappresenta un integrale della funzione Lagrangiana L del problema dei due corpi; a meno di termini del secondo ordine ϵ risulta uguale all'energia divisa c^2 . Per fornire un esempio astronomico, Levi-Civita consultò le tabelle di Moore dell'Osservatorio di Lick²¹, considerando la N°28, b^1 Persei, per cui determinò un periodo di tempo minore di un secolo necessario per trovare una ΔV apprezzabile.

Il contenuto di queste poche ma dense pagine di entrambi i lavori viene in parte ripreso ed ampliato da Levi-Civita nel presente volume, in cui sviluppa tutti

¹⁹Cf. pag. 232, riportiamo tradotto 'La conclusione finale è che l'accelerazione del centro di massa G della stella doppia è diretta lungo l'asse maggiore verso il periastro della stella principale'.

²⁰Questo è l'errore notato da Sir Arthur Eddington e G. L. Clark, come affermano nel loro lavoro *The problem of n bodies in general relativity theory* pubblicato il 16 giugno 1938 e citato nella nota (12); riportiamo l'estratto originale:

In a recent investigation of the problem of two bodies in general relativity theory, Prof. Levi-Civita (1937b) has reached the conclusion that the centre of gravity has a secular acceleration in the direction of the major axis of the orbit towards the periastron of the larger mass. He gives an example of a binary star in which this acceleration may become detectable in much less than a century, perhaps even in a few years. Since the periastron slowly revolves, Levi-Civita's result implies that the binary star as a whole spontaneously describes a circle of very large radius. There seems to be no obvious ground for regarding this as impossible; it is conceivable that an unsymmetrical system may radiate momentum by gravitational waves and so experience a recoil. But the behaviour is so peculiar as to inspire doubt; and we determined to re-examine the problem with a view either to detecting an error or to obtaining further light on the nature of the phenomenon.

²¹L'osservatorio è situato sulla sommità del monte Hamilton a una quota di 1283 m, a est di San Jose, California.

i necessari calcoli e argomentazioni in modo da renderli il più possibile chiari, come auspica egli stesso di poter realizzare nelle pagine della sua Prefazione (la si veda qui di seguito riportata).

Inesattezze tuttavia sono ancora presenti, come mette in luce Thibault Damour²²: *However, the use of the PN approximation for describing the dynamics of N extended bodies turned out to be fraught with difficulties. Most of the early derivations of the 1PN-accurate equations of motion of N bodies turned out to involve errors: this is, in particular, the case of the investigations of Droste, De Sitter, Chazy and Levi-Civita. These errors were linked to incorrect treatments of the internal structures of the bodies.*

Questa materia era pure stata esaurientemente trattata in precedenza in un articolo di Thibault Damour and Gerhard Schäfer²³ da cui emerge che sebbene Levi-Civita concluda (si veda il Capitolo VI, sezione 3.2) a favore dell'assenza di un'accelerazione secolare (traguardo corretto), tale risultato sia inconsistente con le equazioni del moto che egli ivi propone, che invece, portando avanti i calcoli a partir da esse con precisione, conducono ad un'accelerazione secolare non nulla. L'errore di calcolo principale, metodologico –messo in luce da T. Damour and G. Schäfer– dovuto alla difficoltà di implementazione del metodo usato dal nostro, è nelle equazioni (VI.39) e (VI.80).

Nonostante le suddette questioni di calibrazione tra le varie versioni coinvolte delle teoria, l'impostazione matematica rigorosa, la bellezza del modello relativistico del problema degli n corpi (raramente presente in molti lavori a lui postumi) e l'abilità di scoprire e far emergere le sottili questioni del moto relativistico²⁴, fanno di questo testo un'opera rimarchevole e di ampio spessore, un passaggio nodale ineliminabile nell'evoluzione teorica moderna degli n corpi relativistici.

²²T. Damour, The general relativistic two body problem, Brumberg Festschrift, De Gruyter Stud. Math. Phys., 21, Berlin, 2014.

²³T. Damour and G. Schäfer, Levi-Civita and the general-relativistic problem of motion, in Studies in the history of general relativity. Papers from the Second International Conference held in Luminy, September 6-9, 1988. Edited by Jean Eisenstaedt and A. J. Kox. Einstein Studies, 3. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

²⁴Emerge fondamentale in questo lavoro la dimostrazione definitiva del cosiddetto 'principio di cancellazione' di Marcel Brillouin, per cui l'autointerazione gravitazionale dei corpi non influisce nell'ordine di approssimazione scelto.

Sulle origini della versione francese del presente testo

Le motivazioni profonde di questo ultimo lavoro di Levi-Civita appaiono intrecciate, da un lato, con quelle puramente scientifiche, precedentemente discusse, e dall'altro, con la forte pulsione del nostro a rimanere in Italia dopo l'umiliazione subita del 1938, per sostenere i suoi allievi. È ben noto che Tullio avrebbe potuto rifugiarsi, accolto con calore, in moltissime sedi universitarie straniere, da Princeton e altre. Nel necrologio di Levi-Civita che Ugo Amaldi lesse ai Lincei²⁵ nel 1946 si trova un'interessante notizia. Quest'ultimo scrive infatti che la trattazione sistematica del problema degli n corpi (rimasta inedita fino alla pubblicazione del 1950) fu redatta da Levi-Civita con la collaborazione²⁶ di Giovanni Lampariello (1903-1964), allievo e successivamente collega di Levi-Civita all'Università di Roma. In particolare, mette in luce Amaldi, Lampariello pubblicò un lavoro intitolato esattamente 'Il problema degli n corpi nella relatività generale' nei *Commentationes* della Pontificia Accademia, 6 (1942), 813-863. Dall'osservazione diretta di questo articolo, emerge che fu presentato proprio dallo stesso Levi-Civita l'8 giugno 1941 all'Accademia Pontificia²⁷, pochi mesi prima della sua morte, contenente essenzialmente alcuni preamboli tecnici infine sviluppati nel volume qui riproposto in italiano. In tale lavoro Lampariello afferma: *Le indagini compiute nel problema*²⁸ *impostato in tutta la sua generalità sono state raccolte in una monografia proposta per la stampa nel 'Mémorial des Sc. Math.' del Villat nel marzo 1940. La guerra ne ha impedito la pubblicazione.*

Continua infine Lampariello: *Il Levi-Civita aveva più volte tentato di spiegare il disaccordo fra la conclusione della sua nota del 1937 ed il risultato negativo degli Autori citati*²⁹ *e lo scopo fu raggiunto quando, ripresa la questione fin dall'inizio nell'autunno del 1938, il Levi-Civita e l'autore di questa Memoria poterono stabilire che l'accelerazione di secondo ordine derivava da un riposto errore algoritmico nel trattamento delle equazioni differenziali.*

²⁵Rend. Lincei, (8), 1, (1946), pp. 1130-1155.

²⁶Non troviamo tuttavia altrove un'altra simile affermazione.

²⁷di cui Levi-Civita era Accademico.

²⁸Si riferisce al problema dei 2 corpi.

²⁹Eddington e Clark; per dettagli si veda la sezione precedente.

Sull'evoluzione del problema relativistico degli n corpi: approssimazione PN e sviluppi recenti

Per attaccare il problema degli n corpi, Levi-Civita si servì della cosiddetta approssimazione PN (post newtoniana), basata sull'assunzione che i campi gravitazionali siano sufficientemente 'deboli' e che i moti caratteristici della materia siano 'lenti', comparati alla velocità della luce.³⁰ Tale approssimazione è di natura non lineare, va quindi oltre, è ben più fine, delle versioni linearizzate della teoria. La ragione della bontà ed efficacia di tale metodo, ampiamente ancor oggi usato per lo studio di oggetti quali stelle binarie pulsar o per indagare la natura degli stadi finali di avvolgimento e fusione di due buchi neri, resta tuttavia ancora non pienamente spiegata: nonostante la presenza di condizioni così estreme, il modello teorico costruito con il metodo PN trova conferma nei risultati sperimentali, nelle misure astronomiche. L'inspiegabile efficacia della teoria post-newtoniana, come predisse giustamente il fisico Clifford M. Will³¹, avrebbe giocato un importante ruolo persino nell'individuazione delle onde gravitazionali³².

Dai lavori di Levi-Civita ed Eddington passarono molti anni prima che qualcuno attaccasse nuovamente il problema in questione. Questo periodo fa parte di un contesto culturale 'dormiente' dell'intera Relatività Generale che durò all'incirca fino al 1960, causato in parte dall'assenza di rilevanze sperimentali ed osservazionali sulla teoria stessa, in parte dalla sua complessità, o ancora dalla 'distrazione' di nuovi campi della fisica, come la fisica nucleare e particellare, emersi nella metà del ventesimo secolo. La primissima rinascita della teoria della relatività si ebbe nella metà degli anni sessanta, quando Fock e Chandrasekhar, rispettivamente in USSR e negli USA, svilupparono e sistematizzarono indipendentemente l'approssimazione PN dandole una nuova forma che gettò basi moderne alla teoria.

L'approccio post-newtoniano fu ripreso da molti studiosi. Alessandro Capo-

³⁰Si veda il Capitolo III del presente volume, *Criteri di approssimazione ed equazioni ridotte*.

³¹Per approfondimenti, suggeriamo il suo articolo: Clifford M. Will, On the unreasonable effectiveness of the post-Newtonian approximation in gravitational physics, PNAS, April 12, 2011 108 (15) 5938-5945.

³²Si veda ad esempio Y. Zhang, S. G. Wu, W. Zhao, Gravitational-Wave by Binary OJ287 in 3.5 PN Approximation, <https://arxiv.org/abs/1305.1122>, 2013, in cui affermano: *We compute the gravitational radiation of the supermassive binary black hole OJ287. By fitting the data of its recent seven outbursts, we obtain the orbital motion up to 3.5PN (Post-Newtonian) order...*

rali³³ ne sviluppò una nuova forma facendo uso delle coordinate armoniche e delineò un metodo con stime rigorose dell'errore per calcolare le componenti del tensore metrico g^{ab} , nota la 'deviazione metrica' k^{ab} . Inoltre formulò anche in un modo nuovo la parte spaziale delle equazioni locali del moto per un fluido perfetto in prima approssimazione PN, permettendo la costruzione di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine per il moto di ogni corpo di un sistema isolato ad n corpi.

La ricerca di Lagrangiane per sistemi di n punti massa è stata successivamente effettuata sistematicamente da Thibault Damour e Gerhard Schäfer³⁴ e in differenti sistemi di coordinate: essi notano che le Lagrangiane dipendono dalle accelerazioni, con l'eccezione di una classe speciale di coordinate, che non includono tuttavia le coordinate armoniche. Recentemente –si veda la nota (22)– Thibault Damour richiama la storia del problema degli n corpi, dedicandosi ai sistemi binari, e giungendo ad un nuovo ed efficace metodo, detto *Effective One Body* (EOB). Mediante la cosiddetta affermata Relatività Numerica (NR), si prova l'accuratezza del formalismo EOB nella descrizione di vari sistemi binari, ad esempio, buchi neri o di stelle di neutroni. Per l'analisi delle onde gravitazionali, dunque, sembra proprio che lo strumento EOB sia adatto a fornire previsioni in maniera efficiente e teoricamente più rigorosa rispetto all'approssimazione PN.

Citiamo infine il metodo chiamato 'post-Minkowski' di Blanchet, Damour ed Iyer, che rielabora le equazioni di Einstein in due modi: uno rivolto alla 'zona vicina', l'altro a quella 'lontana', con una strategia detta *singular asymptotic matching* che unisce le soluzioni in regioni sovrapposte. Questo metodo fornisce una naturale tecnica di 'regolarizzazione' per controllare le espressioni degli integrali potenzialmente divergenti che inevitabilmente si incontrano nello studio di tali problemi gravitazionali.³⁵

Nel dopo-guerra, a Padova, la città sede universitaria in cui Levi-Civita si formò, Nicolò Dallaporta fu promotore della rinascita della Relatività Generale

³³A. Caporali, A Reformulation of the Post-Newtonian Approximation to General Relativity, I. The metric and the local equations of motion. *Nuovo Cimento B* (11) 61 (1981), no. 2, 181-204. II. Post-Newtonian equation of motion for extended bodies. *ibid.*, 205-212.

³⁴T. Damour and G. Schäfer, Lagrangians for n Point Masses at the Second Post-Newtonian Approximation of General Relativity, *Gen. Relativity Gravitation* 17 (1985), no. 9, 879-905.

³⁵Anche Levi-Civita naturalmente si ritrova alle prese con simili problemi, ad esempio si veda il testo già citato, *The Relativistic Problem of Several Bodies*, in cui afferma: ... *we are then exposed, as just mentioned, to the incongruence of something becoming infinite.*

che fu sviluppata per decenni dal suo allievo Fernando De Felice, il quale, oltre a offrirci un trattato³⁶ moderno sulla materia, giunse all'organizzazione di un importante evento mondiale di Relatività³⁷.

³⁶F. De Felice, C. J. S. Clarke, *Relativity on curved manifolds*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. xii+448 pp.

³⁷B. Bertotti, F. De Felice, A. Pascolini, *Proceedings of the 10th International Conference on General Relativity and Gravitation, Contributed Papers*, 3 volumi. Padova, 1983, Roma: Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Nota dei curatori

La traduzione seguente è stata istruita sulla versione francese³⁸(1950), cercando di rispettarne il più possibile la sintassi, la notazione, l'aspetto ed i contenuti culturali. Sono segnalati i (pochissimi) casi in cui ciò non risultasse ragionevole.

Tutti i commenti volti perlopiù a facilitare la comprensione del presente volume e da noi scritti, sono indicati con la sigla *-ndt* (nota dei traduttori) alla fine.

Franco Cardin

Sara Di Ruzza

Leonardo Donà

Padova, 2019

³⁸Trattandosi di volgere dal francese, abbiamo percepito una totale condivisione con la storica **Avvertenza** di Carlo Collodi (1876):

“Nel voltare in italiano i *Racconti delle fate* m'ingegnai, per quanto era in me, di serbarmi fedele al testo francese. Parafrasarli a mano libera mi sarebbe parso un mezzo sacrilegio. A ogni modo, qua e là mi feci lecite alcune leggerissime varianti, sia di vocabolo, sia di andatura di periodo, sia di modi di dire: e questo ho voluto notare qui di principio, a scanso di commenti, di atti subitanei di stupefazione e di scrupoli grammaticali o di vocabolario. Peccato confessato, mezzo perdonato: e così sia.”

Prefazione

(Traduzione dall'originale versione francese)

Molti dei fascicoli di questa Collana di monografie, diretta da Henri Villat³⁹, sono dedicati alla Relatività.

Innanzitutto le rassegne generali di De Donder (n. 8, 14, 43, 58), e poi quelle che sono più specificatamente dedicate alla gravità einsteiniana, come il contributo di Georges Darmois (n. 25) e quello di Haag (n. 46) sul problema di Schwarzschild.

Il presente volume si collega per gli argomenti trattati alle ultime due monografie, benché sia stato concepito e scritto in modo che possa essere letto e seguito da chiunque possieda una conoscenza dei principi del Calcolo Differenziale Assoluto e della Relatività, sia attraverso le esposizioni originali di Einstein, Weyl, Eddington, sia dalle eccellenti Opere francesi di Cartan⁴⁰ (per quanto concerne le teorie matematiche) e di Chazy⁴¹, sia naturalmente dal libro di Levi-Civita *Absolute differential Calculus* (Blackie, London and Glasgow, 1927) dove sono riunite le memorie originali scritte in italiano: *Calcolo differenziale assoluto* e *Fondamenti di meccanica relativistica*, Bologna, Zanichelli.

Quanto al presente volume, è superfluo avvisare, come indica il titolo, che noi aspiriamo a fissare nel modo più semplice possibile l'aspetto relativistico di ciò che Newton e i suoi successori consideravano il cuore della Meccanica celeste ordinaria.

Naturalmente, assumeremo noti i principi generali della Relatività che unificano tutti i fenomeni e in particolare permettono, quando ci limitiamo ad un

³⁹Il testo francese della presente monografia apparve come Fascicolo CXVI del *Mémorial des Sciences Mathématiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1950.

⁴⁰*Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Paris, Gauthier-Villars, 1928.

⁴¹*La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*. Paris, Gauthier-Villars, t. 1, 1928; t. 2, 1930.

mezzo continuo soggetto a gravità, di stabilire le equazioni differenziali alle derivate parziali che ne governano il moto.

Si riconosce in questo programma (sottintendendo l'eventuale ricorso ai risultati matematici di cui abbiamo bisogno) lo stesso principio guida su cui la Meccanica celeste ordinaria è stata costruita, fondata sulla legge di attrazione newtoniana tra due particelle e la legge del moto, anch'essa newtoniana, di ogni particella in un mezzo.

Mettendo in atto questo schema, si può applicare in Meccanica classica il principio di reazione⁴² e ricondurre lo studio del moto di molti - diciamo n -corpi, soggetti alla gravitazione reciproca, al moto dei loro centri di gravità: da cui le equazioni differenziali ordinarie del problema degli n -corpi. Il caso più semplice, $n = 2$, è stato non solo proposto, ma, sostanzialmente, risolto da Newton stesso.

Per $n > 2$, l'integrazione ha successo molto raramente, ed è pertanto necessario far ricorso a dei metodi di approssimazione (la teoria delle perturbazioni), permeanti tutta l'Astronomia.

Le modifiche introdotte dalla teoria della relatività, per quanto in linea di principio siano profonde e di vasta portata, danno luogo, nei casi ordinari, a differenze quantitative quasi trascurabili; siamo certi pertanto di poter considerare i suddetti problemi nella loro essenza classica, con numerose e complesse correzioni, generalmente molto piccole, provenienti dalla più alta e generalizzata concezione del mondo fisico da cui muoviamo.

Esiste comunque un caso importante in cui è stato possibile applicare la nuova teoria rigorosamente fino alla fine. Questo, mutuando il linguaggio classico newtoniano, è il problema dei due corpi, considerato sotto le ipotesi limite che uno dei due corpi sia infinitesimamente piccolo e che l'altro sia dotato di simmetria sferica; è il problema di Schwarzschild, a ben ragione considerato, per la sua estrema importanza, come il più valido risultato, banco di prova della teoria di Einstein (si veda in particolare il volume n.46, di Haag, del *Mémorial des Sciences mathématiques* specificatamente dedicato al problema).

Appena si va oltre il problema suddetto, che noi diremo dei due corpi, dove tuttavia un corpo è infinitesimo (e l'altro sferico), sembra che sia necessario abbandonare ogni speranza di trattare rigorosamente in Relatività generale le questioni usualmente risolte in Meccanica classica.

Persino il problema dei due corpi, a suo tempo risolto da Newton, ha poche

⁴²In effetti, la locuzione comunemente adottata è 'principio di azione e reazione'. Esso consente la riduzione all'azione tra i centri di massa, ma è ben solidamente correlato al concetto di interazione simultanea, definitivamente non relativistico. -ndt

possibilità di essere trattato con successo.

Ciò avviene perché, nello schema relativistico, non vale il principio di reazione, e non sappiamo come ricondurre le equazioni differenziali alle derivate parziali (quattordici con altrettante incognite, nella forma in cui poniamo il problema; si veda in seguito, Capitolo II) ad equazioni differenziali ordinarie, tanto meno come integrarle.

Siamo quindi costretti a rinunciare alla ricerca di una soluzione rigorosa e ad accontentarci di un processo di approssimazioni successive.

Fu lo stesso Einstein⁴³ ad intraprendere il primo passo integrando le sue equazioni in termini di potenziali ritardati a condizione di mantenere solo i termini lineari. Egli scoprì, tra le altre cose, l'esistenza delle onde gravitazionali. Circa nello stesso periodo, Droste⁴⁴ intraprese l'integrazione, mediante approssimazioni successive, delle equazioni generali della materia gravitante in movimento. Gli ordini di grandezza sono stabiliti con riferimento alle dimensioni standard del nostro sistema planetario, e il metodo di calcolo è portato avanti per il problema degli n -corpi con delle osservazioni semplificanti l'obiettivo di ottenere, fino al primo ordine, le correzioni relativistiche nelle equazioni differenziali ordinarie.

De Sitter⁴⁵ studiò questa importante questione nel suo lavoro *On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences*.

Nella teoria newtoniana il moto del centro di gravità di ogni corpo C è influenzato dall'attrazione degli altri corpi, ma *non* dal corpo stesso. Ma non è questo il caso neppure in uno schema relativistico approssimato, nonostante De Sitter esprima la convinzione che l'effetto di C su se stesso consista semplicemente in una leggera modifica dei valori costanti delle masse e che le equazioni finali non mostrino altri effetti da esso derivanti.

È bene ricordare inoltre che Marcel Brillouin⁴⁶ nel 1922 osservò che le ragioni che abbiamo per ignorare in gravitazione newtoniana qualsiasi effetto emergente dal moto del corpo stesso nella determinazione del campo di forza che lo muove, non sono più così evidenti quando consideriamo un corpo o un punto di massa finita nello spazio einsteiniano.

Tuttavia, De Sitter adottò quel punto di vista. Le sue formule sono valide per

⁴³'Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation', *Preuß. Ak. der Wiss., Sitzungsberichte*, 1916, pp. 688-696.

⁴⁴'The Field of Moving Centres in Einstein's Theory of Gravitation', *Ak. van Wet. te Amsterdam*, 19 (1926) 447-455.

⁴⁵*Monthly Notices of the R. A. S.* in particolare 67 (1916) 155-183.

⁴⁶'Gravitation einsteinienne. Statique. Point singulier. Le point matériel', *C. R. Acad. Sc.* 175 (1922) 1008-1012.

un corpo infinitesimamente piccolo nel campo prodotto da molti altri corpi in moto; ma le sue formule non sono valide, senza discussioni preliminari, per predire le influenze reciproche in un sistema di corpi celesti.

In seguito⁴⁷ vennero messe bene in evidenza molto chiaramente le ipotesi addizionali attraverso le quali il problema degli n -corpi potesse essere ricondotto al tipo, concepibile *a priori*, di equazioni differenziali classiche con termini addizionali per la correzione einsteiniana.

Per $n = 2$, il problema imperturbato è integrabile in senso classico, e si ci riconduce al calcolo e all'interpretazione della perturbazione. Questo è quanto sarà esattamente fatto nella conclusione della presente esposizione.

Prima di concludere questa prefazione, è necessario presentare alcune osservazioni di carattere storico.

Nel secondo articolo in *The American Journal of Mathematics*⁴⁸, fu annunciato che la correzione einsteiniana del problema dei due corpi coinvolgeva un'accelerazione secolare del loro centro di gravità, che si sarebbe evoluto lungo la linea degli apsi comune alle orbite (imperturbate) dei due corpi. Questa frettolosa conclusione proveniva unicamente da un errore materiale di calcolo (i cui passaggi presentati nel presente volume sono stati comunque perfettamente corretti).

Einstein, Infeld, e Hoffmann⁴⁹ si sono avvicinati al problema in un modo completamente differente riducendo il problema relativistico degli n -corpi ad un caso particolare di una nuova teoria riguardante l'evoluzione di singolarità che possono influenzare le soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali.

Idea brillante, ma esige, allo stato attuale, calcoli estremamente lunghi e complicati (si veda p. 88 dell'articolo citato).

Robertson⁵⁰, tuttavia, ha considerato l'idea dell'accelerazione del centro di gravità, arrivando alla conclusione corretta che, contrariamente all'affermazione annunciata nel suddetto articolo (*Astronomical consequences of the relativistic two-body problem*), non ci sia accelerazione secolare.

Sostanzialmente nello stesso periodo l'esistenza di una tale accelerazione seco-

⁴⁷Levi-Civita, 'The Relativistic Problem of Several Bodies', *Am. Journal of Math.* 69 (1937).

⁴⁸Levi-Civita, 'Astronomical Consequences of the Relativistic Two-Body problem', *Am. Journal of Math.* 69 (1937).

⁴⁹'The Gravitational Equations and the Problem of Motion', *Annals of Math.* 39 (1938) 65-100.

⁵⁰Note on the Preceding Paper: The Two-Body Problem in General Relativity', *Annals of Math.* 39 (1938) 101-104.

lare fu esclusa da Eddington e Clark⁵¹ applicando le equazioni di De Sitter (debitamente corrette e semplificate con un'applicazione intuitiva del principio di reazione).

Al contrario, noi ci impegneremo, nel presente volume, ad evidenziare tutti i passaggi logici e a sviluppare i calcoli in modo tale che sia possibile seguirli con il minimo sforzo.

Un'accurata analisi è stata recentemente elaborata e pubblicata da Fock⁵² sulle circostanze che rendono possibile un approccio alla soluzione, attraverso successive approssimazioni, del problema relativistico di un mezzo continuo soggetto ad equazioni gravitazionali. Sotto certi aspetti egli ha spinto l'approssimazione oltre l'obiettivo che ci siamo proposti, avendo in mente specialmente il problema di un numero finito di corpi, in particolare, di due corpi separati. Fock, comunque, non ha affrontato alcuna applicazione.

⁵¹ 'The Problem of n-Bodies in General Relativity Theory', *Proc. Roy. Soc. London*, S. A., no. 927, 166 (1938) 465-475.

⁵² 'Sur le mouvement des masses finies d'après la théorie de gravitation einsteinienne', *Journal of Physics, Academy of Sciences of the U.S.S.R.* 1 (1939).

Indice

Introduzione	III
Prefazione	XIX
I Gravitazione einsteiniana	1
I.1 Spazi di Riemann. Spazio-tempo	1
I.1.1 Quadro storico	1
I.1.2 Parametri e momenti di una direzione. Geodetiche . . .	2
I.1.3 Spazio-tempo secondo Einstein e Minkowski	3
I.1.4 La dinamica del punto materiale ed il principio geodetico	3
I.2 Mezzi continui	4
I.2.1 Revisione dei principi elementari	4
I.2.2 Il concetto astratto di materia e flusso negli spazi di Riemann	5
I.2.3 Linee d'universo o linee orarie	6
I.2.4 Lemma di Green	7
I.2.5 Teorema della divergenza	10
I.2.6 Espressione analitica del principio di conservazione della massa	11
I.2.7 Applicazione dei concetti precedenti allo spazio-tempo .	12
I.2.8 Qualche osservazione sulle dimensioni	12
I.2.9 Forma dell'equazione di continuità d'interesse particolare in Meccanica Relativistica	13
I.2.10 Moto geodetico	15
I.2.11 Riassunto e introduzione della prossima sezione	16
I.3 Eq. gravitazionali per mezzi continui disgregati	16
I.3.1 Equazioni di Einstein	16
I.3.2 Materia disgregata. Il tensore energetico corrispondente	17

I.3.3	I principi di conservazione	18
I.3.4	Una riconsiderazione del principio geodetico per ogni elemento del mezzo	20
II	Analisi delle Eq. del moto gravitazionale	21
II.1	Funzioni incognite ed equazioni	21
II.1.1	Premesse	21
II.1.2	Sistemi normali di equazioni differenziali alle derivate parziali. Indicazioni bibliografiche	23
II.1.3	Applicazione della teoria generale al presente caso. Evidenza della non-normalità dovuta necessariamente all'invarianza generale del sistema	25
II.2	Coord. isometriche, riduzione alla forma normale	27
II.2.1	Il caso speciale di Einstein. Artificio analitico di De Donder e interpretazione geometrica di Lanczós	27
II.2.2	La forma equivalente delle equazioni di Einstein	32
II.2.3	La normalizzazione del sistema che include simultaneamente le equazioni di gravitazione e il principio geodetico	32
III	Criteri di appross. ed eq. ridotte	35
III.1	Ordini di grandezza e uso di quantità adim.	35
III.1.1	Stime numeriche	35
III.1.2	Ipotesi qualitative e semplificazioni che ne risultano. Definizione dell'ordine di approssimazione	37
III.1.3	Altre origini di riduzione	39
III.1.4	Formule che approssimano il ds^2 e i momenti delle linee orarie	40
III.1.5	Formule che approssimano il tensore dell'energia	41
III.1.6	L'operatore $\square\Phi$ di una funzione Φ del primo ordine	42
III.2	Riduzione delle equazioni e integrazione	42
III.2.1	Le equazioni di Einstein	42
III.2.2	Integrazione delle equazioni che definiscono i γ_{ik} fino al secondo ordine escluso	44
III.2.3	L'equazione che definisce γ_{00} fino alla seconda approssimazione	45
III.2.4	Trasformazione dell'equazione (III.44) mediante il principio di conservazione della massa interpretato nello spazio ordinario	48
III.2.5	L'integrazione dell'equazione (III.49)	51

III.2.6 Riassunto dei calcoli precedenti	52
IV Sforzi interni e possibile trascurabilità	55
IV.1 Sul tensore dell'energia e la pressione	55
IV.1.1 Considerazioni generali	55
IV.1.2 Ipotesi relativistiche sulla pressione	56
IV.2 Ritorno alle equazioni del moto	56
IV.2.1 Contributo di p sulle componenti τ_{ik} . Velocità del suono nei mezzi continui gravitanti	56
IV.2.2 Modifica di ε derivante dalla pressione	57
IV.2.3 Equazioni del moto che sostituiscono il principio geode- tico e loro interpretazione classica	58
IV.3 Conseguenze generali per ogni corpo	59
IV.3.1 Equazioni del moto per i centri di gravitazione	59
IV.3.2 Distribuzione simmetrica della pressione	60
IV.3.3 Legittimità a limitarsi ai mezzi granulari	60
V Riduzione a eq. differenziali ordinarie	61
V.1 La funzione di Lagrange	61
V.1.1 Revisione del principio geodetico	61
V.1.2 Costruzione della funzione lagrangiana	62
V.2 Le immediate vicinanze di un punto in moto	63
V.2.1 Notazioni	63
V.2.2 Forze interne e principio di eliminazione in Meccanica Classica. Un'osservazione riguardo i valori numerici . .	64
V.2.3 Criteri numerici nell'esecuzione dei calcoli	66
V.2.4 Considerazioni preliminari per la riduzione a un numero finito di punti materiali	67
V.3 Qualche complemento di meccanica classica	68
V.3.1 Centri di gravitazione	68
V.3.2 Condizione di sostanzialità del centro di gravità. Simmetrie	69
V.4 Ulteriori ipotesi che conducono alle O.D.E.	71
V.4.1 Generalità ed ipotesi I	71
V.4.2 Ipotesi II	71
V.4.3 Ipotesi III	72
V.4.4 Alcune conseguenze delle ipotesi precedenti	73
V.5 Il problema degli n -corpi	74
V.5.1 Raggi gravitazionali. Notazioni	74
V.5.2 Calcolo dei potenziali φ_h . Quantità assimilabili a costanti	76

V.5.3	Calcolo dei termini ψ'_h, v'_h, γ_i	78
V.5.4	Coefficienti di massa (masse relative)	79
V.5.5	I tre termini della funzione lagrangiana $\mathfrak{L}_h$: $\mathfrak{R}_h$ (la parte newtoniana), $\mathfrak{D}'_h$ (la perturbazione einsteiniana puntuale, $\mathfrak{D}''_h$ (la perturbazione einsteiniana dovuta all'estensione)	79
V.5.6	Costanti che appaiono nelle equazioni differenziali	81
V.5.7	Precauzioni da osservare nella costruzione delle equazioni differenziali	81
VI	Il problema degli n-corpi	83
VI.1	Lagrangiana per i due corpi	83
VI.1.1	Notazioni correlate il più possibile all'uso classico	83
VI.1.2	Semplificazioni permesse dalla nostra approssimazione. Artificio che fa emergere il principio di eliminazione	85
VI.2	Moto relativo	87
VI.2.1	Formule correlate al problema dei due-corpi in Meccanica classica considerate come preparatorie per la trattazione relativistica	87
VI.2.2	Passaggio al moto relativo	89
VI.2.3	Applicazione dell'operatore $B_{h i}$ a $\mathfrak{R}_h$	89
VI.2.4	Applicazione dell'operatore $B_{h i}$ a $\frac{1}{2}\mathfrak{R}_h^2$	90
VI.2.5	Applicazione dell'operatore $B_{h i}$ a $(-\gamma_h^2 - \gamma_h \gamma_{h+1}^*)$	91
VI.2.6	Applicazione dell'operatore $B_{h i}$ a $\mathfrak{D}_h^{(1)}$	91
VI.2.7	Applicazione dell'operatore $B_{h i}$ a $\mathfrak{D}_h^{(2)}$	93
VI.2.8	Conclusione dei calcoli precedenti e deduzione della funzione di Lagrange che governa il moto relativo	95
VI.2.9	Un teorema di equivalenza	97
VI.2.10	Digressione sul calcolo del periodo di una soluzione dell'equazione differenziale di Weierstrass	98
VI.2.11	Precessione del perielio nel caso di due masse finite. Termine addizionale nella formula di Einstein per la precessione del perielio	100
VI.2.12	Il periodo apsidale e la rotazione siderale	101
VI.3	Il moto del centro di gravità	103
VI.3.1	L'accelerazione del centro di gravità in seconda approssimazione	103
VI.3.2	Assenza di un termine secolare	104

VI.3.3 Estensione dell'artificio della Sezione 1 che dà rilievo al principio di eliminazione nel problema degli n -corpi . .	105
---	-----

Capitolo I

Gravitazione einsteiniana

I.1 Spazi di Riemann. Spazio-tempo

I.1.1 Quadro storico

Nel 1854 Riemann¹ introdusse nella Scienza la nozione generale di spazio o di varietà metrica di dimensione n esprimendo, a priori, il quadrato della distanza tra due punti infinitesimamente vicini come forma quadratica dei differenziali nelle coordinate x^i

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dx^i dx^k, \quad (\text{I.1})$$

i cui coefficienti $a_{ik} = a_{ki}$ sono funzioni arbitrarie delle variabili x^i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Questo punto di vista è stato adottato da Gauss nelle sue famose *Disquisitiones circa superficies curvas* per sviluppare la geometria differenziale di una superficie, indipendente dalle proprietà dello spazio in cui la superficie è immersa.

La geometria dello spazio riemanniano definito dall'elemento lineare (I.1) è ovviamente invariante rispetto ad ogni cambio delle coordinate x^i se, come ben noto, il cambio è applicato² al ds^2 stesso.

Supporremo noti i principi basilari del calcolo differenziale assoluto, necessari per lavorare sistematicamente negli spazi di Riemann.

¹ *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Habilitationsschrift.*

² Applicato ai componenti geometrici del ds^2 , il quale ne risulta infine uno scalare invariante. -ndt

I.1.2 Parametri e momenti di una direzione. Geodetiche

Dato un punto P nello spazio (I.1) di coordinate x^i , sia P' un punto infinitamente vicino a P di coordinate $x^i + dx^i$. La direzione PP' di punto iniziale P è caratterizzata dai parametri

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{ds} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{I.2})$$

o dai momenti

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \lambda^k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{I.2}')$$

che soddisfano rispettivamente le equazioni quadratiche³

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \lambda^i \lambda^k = 1, \quad (\text{I.3})$$

$$\sum_{i,k=1}^n a^{ik} \lambda_i \lambda_k = 1. \quad (\text{I.3}')$$

Le λ_i o λ^i sono le componenti covarianti o controvarianti dello stesso vettore unitario λ (tensore di rango uno) funzione del punto P nello spazio.

Sia g una curva nello spazio (I.1), congiungente due punti P_0 e P_1 ; sia g' una curva infinitesimamente vicina a g , avente gli stessi estremi P_0 e P_1 . Essa può essere ottenuta da uno spostamento infinitesimale di ogni punto $P(x^1, \dots, x^n)$ di g cosicchè $P'(x^1 + \delta x^1, \dots, x^n + \delta x^n)$ sia la posizione di P dopo la deformazione. Se la lunghezza di g è minimizzata tra le suddette curve g' , g' ha la stessa lunghezza di g , a meno di infinitesimi di ordine superiori, cioè la variazione della lunghezza di g è nulla

$$\delta \int ds = 0. \quad (\text{I.4})$$

E' chiaro che questa equazione variazionale può essere soddisfatta da curve che non seguono il percorso più corto⁴ da P_0 a P_1 : in ogni caso, le loro curve integrali sono dette geodetiche.

³Le (I.3) e (I.3') sono una semplice conseguenza della (I.1). -ndt

⁴Cioè, curve semplicemente *stazionarie* del funzionale lunghezza. -ndt

I.1.3 Spazio-tempo secondo Einstein e Minkowski

Un'applicazione delle idee geometriche di Riemann alla filosofia naturale, che non si sarebbe mai presentata a Riemann stesso e ai suoi più prossimi discepoli, fu elaborata da Einstein con la sua teoria della Relatività, nata, come ben noto, da un'interpretazione del famoso esperimento di Michelson.

Questa teoria ci conduce inizialmente, come Lagrange propose esplicitamente, alla rappresentazione dei fenomeni meccanici come una sorta di geometria di uno spazio quadri-dimensionale, avente il tempo come una delle coordinate. La metrica di tale spazio-tempo è concepita in termini riemanniani, ma la forma quadratica ds^2 non è definita, dal momento che il differenziale del tempo gioca, secondo Minkowski, un ruolo algebricamente diverso da quello delle altre coordinate.

I.1.4 La dinamica del punto materiale ed il principio geodetico

Il famoso principio d'inerzia della Meccanica Classica postula che i moti di un punto materiale in un campo nullo, cioè in assenza di forze, sono rettilinei ed uniformi. Questa legge, sconosciuta ai filosofi pre-galileiani, è stata la base per la costruzione dell'intera dinamica classica.

Ben prima di formulare la sua teoria della Relatività generale, Einstein⁵ aveva esteso lo stesso principio. Essendo il dominio geometrico della sua costruzione uno spazio-tempo la cui metrica era a priori arbitraria e collegata (in un modo che per ora lasciamo indeterminato) ai fenomeni fisici in esso aventi luogo. Se con

$$ds^2 = \sum_{i,k=0}^3 g_{ik} dx^i dx^k \quad (\text{I.5})$$

indichiamo il quadrato della distanza tra due punti infinitesimamente vicini (l'intervallo elementare dello spazio-tempo) essendo x^0 il tempo e x^1, x^2, x^3 le tre coordinate spaziali, allora i movimenti di un punto materiale in un dato campo (in particolare nullo) o non noto sono caratterizzati dall'equazione variazionale

$$\delta \int ds = 0, \quad (\text{I.4})$$

⁵Einstein-Grossmann, *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*, Leipzig und Berlin, Teubner, 1913, p. 38.

perciò rappresentati dalle geodetiche dello spazio-tempo che abbiamo trattato in (I.1.2).

Questo è il principio geodetico di Einstein. Si tratta di un'equazione che è invariante rispetto ad un'arbitraria trasformazione di coordinate, inclusa la variabile x^0 ; e questo fornisce la più grande generalizzazione del principio del cambio di coordinate, che, come abbiamo visto abitualmente, non coinvolgono il tempo.

Ma quali sono le leggi che governano la costruzione dell'intervallo ds^2 ?

La risposta è fornita in maniera corretta dalla teoria della Relatività generale, che Einstein formulò un po' più tardi. Per riuscire a fare i conti con questo problema in maniera concerta, conviene ricordare precedentemente, qualche concetto riguardante il moto di un mezzo continuo.

I.2 Mezzi continui

I.2.1 Revisione dei principi elementari

Le basi geometriche e cinematiche della Meccanica dei Continui, che presuppone in ambito classica una metrica euclidea dello spazio in cui il fenomeno del moto ha luogo, sono facilmente estendibili agli spazi di Riemann.

Qui rivedremo i risultati, che sono di particolare interesse nella presente monografia, iniziando con i primissimi elementi. In primo luogo la nozione di un campo vettoriale nello spazio euclideo ordinario.

Il vettore v del campo è caratterizzato dalle sue componenti cartesiane v_x, v_y, v_z , che assumiamo essere funzioni delle coordinate x, y, z e del tempo t (campo non stazionario). Otteniamo un'intuitiva idea del campo supponendo che v sia la velocità dell'elemento materiale di un sistema continuo che, all'istante t , occupa la posizione $P(x, y, z)$.

Il fatto che ci occupiamo di un sistema materiale che evolve esattamente con quel campo di velocità è caratterizzato dall'aggiunta di una funzione scalare, la densità, la quale, moltiplicata per l'elemento di volume spaziale dS , ci dà la massa dell'elemento materiale che occupa il volume dS all'istante t .

Inoltre affermiamo che nella regione dello spazio considerata ci sia un flusso stazionario⁶, qualora la distribuzione delle velocità v non dipenda da t .

Le linee di flusso all'istante t sono definite dal fatto che lungo tali linee il vettore

⁶Nel testo originale francese e poi inglese si ritrova 'permanent' invece del termine, ora universale, 'stazionario'. -ndt

v è ovunque tangente. Questa condizione è espressa dal sistema differenziale

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

per cui la classe di congruenza delle curve integrali è invariante rispetto al tempo se il flusso è stazionario.

I.2.2 Il concetto astratto di materia e flusso negli spazi di Riemann

Consideriamo ora uno spazio di Riemann n -dimensionale il cui elemento lineare è (I.1).

Per estendere l'idea precedente, si deve assumere una congruenza di linee data dal sistema differenziale

$$\frac{dx^1}{\lambda^1} = \frac{dx^2}{\lambda^2} = \dots = \frac{dx^n}{\lambda^n}, \quad (\text{I.6})$$

dove i λ^i , funzioni nelle variabili x^i , sono i parametri direzionali di un elemento arbitrario, o più in generale, sono proporzionali a tali parametri. Indichiamo con $d\tau$ il valore comune degli n rapporti (I.6) introducendo in questo modo un parametro τ (definito a meno di una costante additiva) che serve a individuare la posizione su una linea qualsiasi di congruenza (I.6). L'insieme di queste linee dipende da $n - 1$ costanti arbitrarie⁷ c_α ($\alpha = 1, \dots, n - 1$); attraverso ogni punto⁸ regolare P del campo in considerazione passa una e una sola linea.

Ora, generalizzando in un modo perfettamente naturale ciò che avviene nello spazio ordinario, dobbiamo introdurre ancora una funzione scalare $\varepsilon(P)$ del punto P , o meglio, delle coordinate x^i , da interpretare come la densità di materia, o di una entità simile, diffusa in tutto lo spazio sopra menzionato, come

⁷Da un lato, la tipologia di scrittura in (I.6) per un'equazione differenziale era tipica a cavallo tra ottocento e novecento, si veda p.e. l'uso sistematico di essa nelle opere di Poincaré. Tale modalità manifesta comunque una importante e raffinata informazione matematica: mette in evidenza l'aspetto puramente proiettivo dei campi vettoriali e delle correlate curve soluzioni, a meno della loro parametrizzazione. D'altro canto, la dimensionalità proposta della totalità delle linee integrali, cioè $n - 1$ in $\mathbb{R}^n$, è facilmente spiegabile: localmente (lontano dai punti critici di λ) possiamo sempre costruire ipersuperfici Σ , di dimensione $n - 1$, luogo di punti iniziali per l'equazione differenziale, l'uso del teorema di esistenza e unicità porge la costruzione di insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$, del tipo $] - a, a[\times \Sigma$ riempiti dalle soluzioni. -ndt

⁸Nel senso adottato comunemente in Meccanica (e in Geometria), cioè considerando λ della (I.6) differenziabile quanto sia richiesto e diverso da zero quasi ovunque nel dominio in considerazione.

accadrà di considerare successivamente in alcuni casi.

I parametri λ^i e la funzione ε potrebbero dipendere non solo dalle x , ma anche da un'altra variabile t (il tempo); tuttavia nei casi che ci interessano il tempo t sarà una delle variabili x , ed il ruolo della variabile che fissa la posizione sulle linee di congruenza sarà giocato da un'altra quantità, per esempio dall'ausiliario τ , appena introdotto.

Assumendo tutto ciò, diciamo che esiste un flusso di materia nello spazio in considerazione se, indicata con dV l'estensione (riemanniana) di un dominio elementare che circonda il punto P , assumiamo di attribuire a dV la massa (o quantità di materia) $\varepsilon(P)dV$. A quel punto, è sufficiente applicare a questo spazio le stesse considerazioni evocate per i principi fondamentali della Meccanica dei Continui, per partire dal punto di vista di Euler e arrivare fino a quello di Lagrange, per riconoscere che siamo, d'ora in avanti, nella posizione di seguire il movimento di qualsiasi elemento di ciò che abbiamo chiamato materia.

In effetti, l'integrazione di (I.6) definisce il moto di P nella forma

$$P = P(c_\alpha, \tau)$$

ed è sufficiente introdurre questa espressione lagrangiana per P in $\varepsilon = \varepsilon(P)$ per ottenere l'espressione, lagrangiana anch'essa, di ε .⁹

Il flusso stazionario è caratterizzato dalle circostanze a cui ci siamo riferiti sopra, cioè che le linee di congruenza e la densità ε sono invarianti (non dipendono da t , considerata come variabile eccedente, non coinvolta, rispetto alle x).

I.2.3 Linee d'universo o linee orarie

Chiamiamo in questo modo le traiettorie degli elementi di materia in un flusso stazionario dello spazio-tempo. Questa locuzione estende allo spazio-tempo la terminologia usuale secondo la quale nel moto di un punto materiale nello spazio ordinario, la curva che rappresenta in un piano cartesiano t, s le variazioni nel tempo dell'ascissa curvilinea s sulla traiettoria, è chiamata diagramma orario del moto¹⁰.

Introduciamo ora i concetti analitici necessari per tradurre matematicamente

⁹Levi-Civita e Amaldi, *Compendio di meccanica razionale*, seconda edizione. Bologna, Zanichelli, 1938. Vedi anche: Beltrami, "Ricerche sulla cinematica dei fluidi" in *Opere* 2, pp. 202-379.

¹⁰Cf. M. Lévy, *Éléments de Cinématique et de Mécanique*. Paris, E. Bernard, 1902.

la condizione di conservazione della massa per un flusso stazionario (o anche non-stazionario) in uno spazio di Riemann arbitrario.

I.2.4 Lemma di Green

Sia¹¹ $f(x^1, \dots, x^n)$ una funzione continua con le sue derivate del primo ordine in un campo $\mathfrak{B}$ avente σ come bordo. Per fissare le idee, consideriamo uno spazio di Riemann munito di una metrica definita¹².

Si ha

$$\int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d\mathfrak{B}}{\sqrt{a}} = - \int_{\sigma} f n_i \frac{d\sigma}{\sqrt{a}} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{I.7})$$

dove a è il discriminante della forma (I.1)¹³, e n_i è l' i -esimo momento lungo x^i della normale a σ , diretto verso l'interno di $\mathfrak{B}$ ¹⁴.

¹¹La versione del Lemma di Green, qui di seguito riproposta in questa sezione (I.2.4), segue esattamente l'originale francese di Levi-Civita e riflette certamente il tempo in cui è collocata e fu scritta. Sebbene fu Vito Volterra che per la prima volta propose in un'unica versione i vari teoremi integrali –Delle Variabili Complesse negli Iperspazi, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 1889, pp. 158-165–, si dovrà aspettare Elie Cartan –Les Systèmes Différentiels Extérieurs et leurs Applications Géométriques, Hermann, Paris, 1945– per la formulazione moderna del teorema di Stokes, coinvolgente k -forme e differenziale esterno. Si veda Victor J. Katz, The History of Stokes' Theorem, Mathematics Magazine, Vol. 52, No. 3, 1979, pp. 146-156. -ndt

¹²La celebre formula secondo cui un integrale esteso in un dominio dello spazio possa essere ricondotto ad un integrale esteso al bordo del dominio stesso fu stabilita per la prima volta da G. Green nel suo lavoro, *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, Nottingham, 1828. Ma questo lavoro rimase ignoto sino al 1846, quando Lord Kelvin notò il suo valore straordinario proprio nel momento in cui il pensiero matematico e fisico era orientato verso la teoria del potenziale che Gauss, indipendentemente da Green, aveva appena formulato nel suo famoso testo, *Allgemeine Lehrsätze in beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte*, pubblicato nel 1840. Il lavoro di Green venne ripubblicato nei tomi 39, 44, 47 del *Journal de Crelle* (1850, 1852, 1854) e finalmente nei *Mathematical Papers* di Green (1871).

La formula

$$\int_C X dx + Y dy = \iint \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy$$

fu dimostrata da Riemann nel 1851 nella sua famosa tesi. L'illustre Autore sembra aver ignorato i lavori di Green e Gauss. Questo spiega perché il teorema porti spesso il nome di Riemann.

¹³Nel caso dello spazio-tempo, deve essere sostituito con il suo valore assoluto $-g$ nelle formule analitiche che stiamo sviluppando in questo e nei successivi numeri. Il discriminante di tale forma è infatti proprio uguale al determinante dei coefficienti simmetrici a_{ik} . (Nota dell'editore, versione inglese)

¹⁴La funzione f può dipendere anche da un numero qualsiasi di parametri.

Se poniamo

$$d\omega = dx^1 dx^2 \cdots dx^n,$$

si ottiene per l'estensione o volume dell'elemento $d\mathfrak{B}$ del campo¹⁵

$$d\mathfrak{B} = \sqrt{a} d\omega.$$

L'integrale del membro a sinistra è

$$\iint \cdots \int \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 dx^2 \cdots dx^n. \quad (\text{I.8})$$

Innanzitutto integriamo rispetto alla variabile x^i cercando le condizioni a cui l'integrazione potrebbe essere soggetta. Sia $d\sigma_i$ un elemento della superficie $x^i = \text{cost}$ e consideriamo il cilindro avente come base questo elemento e la cui superficie laterale è costituita dalle linee coordinate x^i (lungo le quali varia solo la variabile x^i). In generale, entrando (da M_e) nel campo e uscendo (da M_s), questo elemento delimita parecchi elementi su σ . Essendo il campo limitato, il numero delle entrate coincide con quello delle uscite e risulta:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum (f_s - f_e),$$

con la somma estesa sulle differenze dei valori di f nei punti di entrata M_e e di uscita M_s .

L'integrale del volume (I.8) diventa dunque

$$\int \sum (f_s - f_e) d\omega', \quad (\text{I.9})$$

dove¹⁶

$$d\omega' = \frac{d\omega}{dx^i}.$$

Ora, la direzione normale alla sezione trasversale del cilindro considerato è la direzione di una linea coordinata x^i , quindi tutte le sue coordinate sono zero,

¹⁵ $d\omega = dx^1 dx^2 \cdots dx^n = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \cdots dx^{i_n}$ rappresenta, a meno del fattore $n!$, la misura di Lebesgue basata sulle coordinate (x^i) , mentre $d\mathfrak{B} = \sqrt{a} d\omega$ è la conseguente misura invariante correlata alla metrica riemanniana a_{ij} , basata sulla n -forma volume $\mathcal{E}_{i_1 \dots i_n} = \sqrt{a} \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$, dove $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ è il ben noto 'simbolo di Levi-Civita'. Con cura, si può verificare che la (I.7) è una applicazione del teorema geometrico di Stokes per il campo vettoriale $X = f \frac{\partial}{\partial x^i}$: $\int_{\mathfrak{B}} d(i_X \mathcal{E}) = \int_{\sigma} i_X \mathcal{E}$. -ndt

¹⁶ Precisamente, $d\omega' = dx^1 \cdots dx^{i-1} dx^{i+1} \cdots dx^n$. -ndt

tranne per quella di indice i , data da¹⁷

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}.$$

Se n_{ik} denota i momenti della normale rispetto σ_i , si ha

$$n_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{\sqrt{a_{ii}}},$$

dove il ben noto simbolo di Kronecker δ_{ik} è definito da

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k). \end{cases}$$

Inoltre, osservando che $d\sigma$ e $d\sigma_i$ sono definiti da uno stesso cilindro vale la relazione

$$d\sigma \mid \cos(n, i) \mid = d\sigma_i \mid \cos(n_i, i) \mid, \quad (\text{I.10})$$

dove i vettori n ed n_i indicano le direzioni normali a σ e σ_i .

Moltiplicando entrambi i membri della (I.10) per $\sqrt{a_{ii}}$, abbiamo:

$$d\sigma \mid n_i \mid = \frac{d\sigma_i}{\sqrt{a_{ii}}}, \quad (\text{I.11})$$

dove gli n_i sono i momenti della normale a σ internamente a $\mathfrak{B}$.

Nella formula

$$n_i = \sqrt{a_{ii}} \cos(n, i),$$

il segno positivo del radicale è concorde al verso delle x^i , crescenti lungo le linee coordinate.

Si ha che

$$d\sigma_i = \sqrt{aa_{ii}} d\omega', \quad (\text{I.12})$$

da cui

$$d\omega' = \frac{1}{\sqrt{a}} \mid n_i \mid d\sigma; \quad (\text{I.13})$$

sostituendo quest'ultima espressione nell'integrale considerato, si ottiene il secondo membro della formula espressa all'inizio.

¹⁷Richiamiamo inoltre che a^{jk} è il reciproco di a_{ik} , cioè il complemento algebrico diviso per il discriminante a .

I.2.5 Teorema della divergenza

Se $\mathbf{n}$ è il vettore unitario rispetto alla normale di σ nel punto $M(x^1, \dots, x^n)$ orientato arbitrariamente, diciamo che la quantità¹⁸

$$d\sigma \sum_{i=1}^n \lambda^i n_i = \lambda \times \mathbf{n} d\sigma, \quad (\text{I.14})$$

(dove i λ^i sono i parametri di congruenza di un flusso nello spazio e $\mathbf{n}^i$ i momenti della normale a σ) è il *flusso attraverso* $d\sigma$ (per unità di tempo). Poiché la superficie σ è chiusa, se $\mathbf{n}$ è la normale interna al campo $\mathfrak{B}$ che la circonda, l'integrale

$$\int_{\sigma} \lambda \times \mathbf{n} d\sigma \quad (\text{I.15})$$

è il flusso entrante attraverso σ .

Con queste definizioni, assumiamo che $\mathbf{v}$ sia un vettore con v^i le sue componenti controvarianti.

Sappiamo che, se $\mathbf{v}$ è un vettore nello spazio euclideo avente componenti cartesiane $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$, $v_z(x, y, z)$, l'espressione differenziale

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

è invariante rispetto al cambio di coordinate cartesiane ed è chiamata divergenza del vettore $\mathbf{v}$. Questo concetto si estende ad uno spazio di Riemann qualsiasi se poniamo

$$\text{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{a} v^i), \quad (\text{I.16})$$

il cui secondo membro è invariante in senso generale, cioè rispetto una trasformazione arbitraria delle variabili x .

Il concetto di divergenza si estende anche dal caso di un vettore in cui la divergenza è un invariante scalare al caso di un tensore. Nell'ultimo caso la divergenza è un tensore di un ordine inferiore rispetto al tensore originale.¹⁹ Schouten e Struik -nel loro recente libro *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*²⁰ userebbero il termine "valenza" (Bd. I, p.7).

¹⁸Si osservi che il simbolo $\times$ denota il prodotto scalare. -ndt

¹⁹Cf. Levi-Civita, T., *Absolute Differential Calculus*. London and Glasgow, Blackie and son limit, 1927, pp. 153-155.

²⁰Groningen, Noordhoff. Band I, 1935; Band II, 1938.

In virtù del lemma di Green, abbiamo

$$\int_{\mathfrak{B}} \operatorname{div} v \, d\mathfrak{B} = \sum_{i=1}^n \int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{a} v^i) \frac{d\mathfrak{B}}{\sqrt{a}} = - \sum_{i=1}^n \int_{\sigma} v^i n_i \, d\sigma = - \int_{\sigma} v \times n \, d\sigma,$$

dove n rappresenta la normale interna a $\mathfrak{B}$.

La formula

$$\int_{\mathfrak{B}} \operatorname{div} v \, d\mathfrak{B} = - \int_{\sigma} v \times n \, d\sigma \quad (\text{I.17})$$

è il famoso teorema della divergenza, che gioca un ruolo fondamentale nella Meccanica dei Continui ed in Fisica Matematica.

I.2.6 Espressione analitica del principio di conservazione della massa

Si tratta di esprimere il fatto che in un qualsiasi flusso la massa rimane invariata, o meglio, la massa che, ad un dato istante (ovvero per ogni valore del parametro τ), occupa una regione dello spazio è invariante durante il moto della materia. Assumiamo che il moto sia ovunque regolare.

Seguiremo il punto di vista euleriano usando due metodi per calcolare la variazione totale della massa avente luogo nel passaggio da τ a $\tau + d\tau$ in una fissata regione $\mathfrak{B}$ dello spazio, eguagliando successivamente i risultati.

Innanzitutto, si ha che questa variazione è data da

$$d\tau \int_{\mathfrak{B}} \frac{d\varepsilon}{d\tau} \, d\mathfrak{B}.$$

D'altra parte, se ha avuto luogo una variazione di massa in $\mathfrak{B}$, è perché la materia è passata attraverso la superficie σ che avvolge $\mathfrak{B}$, e il flusso totale durante l'intervallo elementare $d\tau$ è

$$d\tau \int_{\sigma} \varepsilon \lambda \times n \, d\sigma = d\tau \int_{\mathfrak{B}} \operatorname{div}(\varepsilon \lambda) \, d\mathfrak{B},$$

in virtù del teorema della divergenza.

Perciò si ha

$$\int_{\mathfrak{B}} \left[\frac{d\varepsilon}{d\tau} + \operatorname{div}(\varepsilon \lambda) \right] d\mathfrak{B} = 0,$$

da cui si ricava, con un ragionamento ben noto, l'equazione di continuità o della conservazione della massa

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + \operatorname{div}(\varepsilon \lambda) = 0. \quad (\text{I.18})$$

I.2.7 Applicazione dei concetti precedenti allo spazio-tempo

Le considerazioni appena svolte all'interno di uno spazio di Riemann con una metrica definita si estendono facilmente allo spazio-tempo.²¹

Tuttavia, in questo caso, assumiamo che vettori, tensori o funzioni scalari coinvolte dipendano solo dalle coordinate x^0, x^1, x^2, x^3 , rimpiazzando la variabile t con x^0 . Di conseguenza, ci occuperemo solo di flussi stazionari, e l'equazione della conservazione della massa per tali flussi diventa

$$\operatorname{div}(\varepsilon\lambda) = 0. \quad (\text{I.19})$$

Dobbiamo notare che la congruenza delle curve, che è, per così dire, la sede del flusso, è caratterizzata dal sistema differenziale (I.6) che, in questo caso, può essere posto nella forma

$$\frac{dx^i}{ds} = \lambda^i(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{I.20})$$

dove la variabile indipendente (di solito chiamata τ) si identifica con la lunghezza d'arco s (di una curva integrale arbitraria) presa (su ogni curva) da un punto arbitrario, e collegata alle x ed ai loro differenziali dx attraverso la (I.5) [o, in particolare, la (I.1), se si tratta di uno spazio di Riemann propriamente detto con una metrica definita].

Un caso particolare molto importante per il nostro scopo è quello delle congruenze geodetiche, che studieremo nelle prossime sezioni.

I.2.8 Qualche osservazione sulle dimensioni

L'equazione di continuità (I.19) è, come vedremo, connessa con l'esistenza di un integrale invariante che risulterà molto importante per l'applicazione che abbiamo in mente.

Dobbiamo stabilire e sviluppare alcune considerazioni collegate ad esso.

Ma prima conviene fare un'osservazione preliminare.

Se una certa entità fisica q (energia, materia, calore, ecc.) viaggia su una varietà (solitamente riemanniana) avente coordinate $x^0, x^1, \dots, x^n$ mentre descrive una congruenza di linee orarie, denoteremo con λ^i ($i = 0, \dots, n$) i parametri della congruenza, e con λ il vettore corrispondente del campo. Sia $d\sigma$ un

²¹Non ci servirà considerare le circostanze particolari che possono sorgere per una metrica indefinita dove, in caso eccezionale, si deve fare i conti con varietà isotrope (di lunghezza nulla).

elemento di superficie²² normale, in un punto P qualsiasi, alla curva oraria λ passante per P. Chiameremo ε “densità corrente” (della grandezza q) ad un dato istante, cosicché

$$\varepsilon d\sigma dt$$

rappresenta la quantità di q che scorre attraverso $d\sigma$ tra l'istante t e l'istante $t + dt$.

Dobbiamo mantenere la quantità $\varepsilon d\sigma dt$ omogenea con q , e le dimensioni di $\varepsilon d\sigma$ saranno $[q]t^{-1}$ e non $[q]$.

Se vogliamo che $\varepsilon d\sigma$ sia un'energia, le dimensioni di q dovranno essere

$$ml^2t^{-2} = ml^2t^{-1},$$

cioè la dimensione di un'azione. Sarà dunque il flusso di un'azione.

Se invece volessimo considerare uno spazio-tempo e usare il tempo römeriano x^0 con le dimensioni di una lunghezza al posto del tempo usuale, allora q dovrebbe essere omogeneo ad una lunghezza-energia, ovvero avrebbe le dimensioni

$$ml^3t^{-2}.$$

I.2.9 Forma dell'equazione di continuità d'interesse particolare in Meccanica Relativistica

A tal scopo consideriamo un flusso stazionario nello spazio-tempo e l'equazione (I.19). Com'è risaputo²³, questa equazione dice che l'integrale

$$\int \varepsilon d\mathfrak{B},$$

dove

$$d\mathfrak{B} = \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

e $-g$ è il discriminante²⁴ dell'elemento lineare (I.5), è invariante rispetto alle equazioni

$$\frac{dx^i}{ds} = \lambda^i \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (\text{I.20})$$

²²Diciamo “superficie”, come in uno spazio ordinario, anche se è una varietà n -dimensionale (essendo lo spazio ambiente di $n + 1$ dimensioni).

²³Cf. Levi-Civita and Amaldi, *Lezioni di meccanica razionale*. Bologna, Zanichelli; tomo II, Capitolo X.

²⁴Da questa relazione deduciamo il significato che Levi-Civita attribuisce a ‘discriminante’, termine usato in altre circostanze in matematica, qui è: $|\det g|$.

della congruenza geodetica delle linee orarie.

Possiamo esprimere questo fatto in una forma che sarà particolarmente utile nei successivi sviluppi se poniamo come dominio di integrazione un campo elementare scelto nella maniera seguente:

Consideriamo una sezione elementare di spazio-tempo di spessore ds , inizialmente ortogonale ad ogni curva oraria scelta a piacere.

Osserviamo innanzitutto che, quando seguiamo il flusso quadri-dimensionale, in cui il campo elementare di integrazione subisce una specifica deformazione, si possono imporre degli incrementi costanti ds alla variabile indipendente s , il che equivale ad impostare l'invarianza dello spessore della sezione elementare (non più necessariamente perpendicolare alla linea). Ciò nasce dal fatto che, preso uno spostamento infinitesimale su una data curva (in uno spazio di Riemann arbitrario) tale che il modulo dello spostamento di ogni punto sia lo stesso per tutti i punti appartenenti alla curva, una variazione, persino finita, Δs della variabile s è un invariante della deformazione.

Infatti, la condizione imposta porta all'equazione

$$s' = s + c \quad (c = \text{cost})$$

soddisfatta lungo la curva, da cui

$$\text{arc}PP_1 = \text{arc}P'P'_1,$$

se P', P'_1 sono i punti P, P_1 dopo lo spostamento lungo la linea oraria.

Tali considerazioni ci spingono a porre l'integrale invariante nella forma

$$\varepsilon \sqrt{-g} dS \frac{dx^0}{ds} ds = \text{cost}, \quad (\text{I.21})$$

dove

$$dS = dx^1 dx^2 dx^3$$

e dove impostiamo come invariante l'espressione

$$\eta dS$$

avendo definito con

$$\eta = \varepsilon \sqrt{-g} \frac{dx^0}{ds} \quad (\text{I.22})$$

una quantità che, come ε , ha le dimensioni di una densità di energia.

I.2.10 Moto geodetico

Sviluppando l'equazione variazionale (I.4) attraverso i ben noti metodi del Calcolo delle Variazioni e del Calcolo Differenziale Assoluto, si trova che le geodetiche di uno spazio di Riemann sono definite da un sistema differenziale

$$\frac{d\lambda^i}{ds} + \sum_{k,l=1}^n \Gamma_{kl}^i \lambda^k \lambda^l = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{I.23})$$

dove Γ_{kl}^i sono ovviamente i simboli di Christoffel di seconda specie.

Queste equazioni esprimono la proprietà di autoparallelismo nel senso di Levi-Civita delle geodetiche, essendo i termini a primo membro le componenti controvarianti p^i del vettore p , curvatura geodetica²⁵, cioè:

$$p^i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d\lambda^i}{dx^k} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{kl}^i \lambda^l \right) \lambda^k = 0. \quad (\text{I.24})$$

Si possono mettere in evidenza le derivate covarianti dei parametri λ^i scrivendo:

$$p^i = \sum_{k=1}^n \lambda_{|k}^i \lambda^k, \quad (\text{I.25})$$

dove $\lambda_{|k}^i$ è la derivata covariante di λ^i .

Da qui allora le componenti covarianti del vettore p sono date da

$$p_r = \sum_{i=1}^n a_{ir} p^i = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ir} \lambda_{|k}^i \right) \lambda^k.$$

Ma, in virtù del lemma di Ricci, si ha

$$\sum_{i=1}^n a_{ir} \lambda_{|k}^i = \sum_{i=1}^n (a_{ir} \lambda^i)_{|k} = \lambda_{r|k}.$$

Dunque,

$$p_r = \sum_{k=1}^n \lambda_{r|k} \lambda^k. \quad (\text{I.25}')$$

Concludiamo che le geodetiche di uno spazio-tempo sono caratterizzate da parametri λ^i o dai momenti λ_r definiti rispettivamente dalle equazioni

$$p^i = \sum_{k=0}^3 \lambda_{|k}^i \lambda^k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{I.26})$$

²⁵Nota anche come 4-accelerazione. -ndt

o altrimenti

$$p_r = \sum_{k=0}^3 \lambda_{r|k} \lambda^k = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{I.26'})$$

I.2.11 Riassunto e introduzione della prossima sezione

Nell'esposizione proposta nelle pagine precedenti, abbiamo introdotto, indipendentemente dalle leggi della gravità, le nozioni di metrica dello spazio-tempo e di un flusso, considerando lo spazio-tempo pervaso di materia, i cui elementi si muovono lungo le curve di una congruenza data *a priori* (geodetica, ad esempio) e costituiscono una configurazione invariante o stazionaria.

La conservazione della massa lungo questo flusso richiede che la funzione ε , ovvero la densità di materia (o eventualmente una entità simile), ed il vettore λ siano collegati l'un l'altro dall'equazione fondamentale

$$\text{div}(\varepsilon \lambda) = 0. \quad (\text{I.19})$$

Prima di applicare queste generalizzazioni alla Relatività Generale, dobbiamo prestare particolare attenzione al caso in cui ε , la cui natura per ora non è stata specificata, sia proprio una densità di energia.

I.3 Equazioni gravitazionali e principio geodetico per mezzi continui in assenza di sforzi interni

I.3.1 Equazioni di Einstein

Ancora non abbiamo stabilito la legge che collega la metrica di uno spazio-tempo ai fenomeni che hanno luogo in esso.

Ci fu un grande passo in avanti realizzato da Einstein nel 1916 nel suo lavoro²⁶ sulle idee generali introdotte in un breve opuscolo di Einstein-Grossmann, nello stabilire una tale legge, enunciandola in una forma indipendente rispetto a qualsiasi possibile sistema di coordinate.

Il contenuto matematico della legge, inclusa la legge di Newton in prima

²⁶ *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik, t.4, 49 (1916) 769-833.

approssimazione, è racchiuso nelle famose equazioni differenziali²⁷

$$G_{ik} - \frac{1}{2}Gg_{ik} = -\chi T_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3), \quad (I.27)$$

dove le incognite principali sono i coefficienti g_{ik} dell'intervallo ds^2 dello spazio-tempo (I.5), che appaiono assieme alle loro derivate prime e seconde nell'espressione del tensore di curvatura G_{ik} e del suo invariante G .

La costante χ è data dalla relazione

$$\chi = \frac{8\pi f}{c^4} \sim 2,071 \cdot 10^{-48} g^{-1} cm^{-1} sec^2, \quad (I.28)$$

dove

$$f \sim 6,675 \cdot 10^{-8} g^{-1} cm^3 sec^{-2}$$

è la costante (di Gauss) di gravitazione universale.²⁸

Queste sono le dieci equazioni fondamentali della Relatività Generale che stabiliscono una relazione di interdipendenza che coinvolge materia e campo gravitazionale, la cui struttura metrica differenziale è caratterizzata dal tensore G_{ik} e che si riduce sostanzialmente alla singola equazione di Poisson nell'approssimazione newtoniana.

Dobbiamo ancora mostrare come la materia in moto eserciti la sua influenza su queste equazioni e, di conseguenza, sulla metrica dello spazio-tempo.

Naturalmente, è il tensore energetico T_{ik} che, a seconda del caso, deve essere correlato con gli altri elementi del problema che si sta affrontando.

I.3.2 Materia disgregata. Il tensore energetico corrispondente

Il caso più semplice è quello della materia disgregata, o, come diremo, perfetta, che forma in altri termini un mezzo continuo nel quale gli sforzi, definiti in modo classico (Cauchy) sono trascurabili. Un tipico esempio è dato dalla materia cosmica (pulviscolo) che gli astronomi credono responsabile della formazione dei corpi celesti con un processo di condensazione e che un certo numero di

²⁷Il tensore covariante doppio G_{ik} , noto anche come tensore di curvatura di Ricci, può essere dedotto contraendo il tensore di curvatura di Riemann rispetto a due indici $G_{ik} := R^j_{ikj}$ dove $R^{\sigma}_{\mu\chi\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial x^{\chi}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\chi\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \Gamma^{\sigma}_{\chi\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\chi\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}$. Inoltre, $G = G^{\lambda}_{\lambda}$. Cf. Levi-Civita, T., *The Absolute Differential Calculus*. London and Glasgow, Blackie and Son, Ltd., 1927, p. 200. -ndt

²⁸Il segno $\sim$ significa "approssimativamente".

scienziati attualmente ritiene essere la sostanza principale costituente le nebulose.

In tal caso, le componenti covarianti o controvarianti del tensore dell'energia T sono, secondo Einstein,

$$T_{ik} = \varepsilon \lambda_i \lambda_k \quad (\text{I.29})$$

o rispettivamente

$$T^{ik} = \varepsilon \lambda^i \lambda^k, \quad (\text{I.29}')$$

dove ε è la densità di energia e λ_i i momenti (λ^i rispettivamente, i parametri²⁹) delle linee orarie dello spazio-tempo, o meglio, delle linee di congruenza del flusso che corrisponde, nello spazio-tempo al moto della materia nello spazio fisico.

Bisogna osservare immediatamente che si potrebbe considerare un'altra³⁰ forma più generale del tensore T definito dalle componenti

$$T_{ik} = (\varepsilon + p) \lambda_i \lambda_k - p g_{ik}. \quad (\text{I.30})$$

Questa espressione caratterizza il caso di una materia all'interno della quale è esercitata una pressione isotropa p , oltre, ovviamente, agli sforzi inerziali anch'essi presenti nella materia perfetta.

Tuttavia, per i nostri scopi, come vedremo a breve, ci interesseremo al caso limite di una materia perfetta (per cui, di conseguenza, vale la forma canonica precedente del tensore T) perché i termini in p sono, nel nostro caso, di un ordine di grandezza trascurabile rispetto al tensore ridotto (I.29).

Ora dedurremo le conseguenze di questa ipotesi e della struttura delle equazioni di Einstein.

I.3.3 I principi di conservazione

Il tensore, le cui componenti covarianti sono i primi membri delle equazioni di Einstein, come ben noto, è a divergenza nulla

$$\text{div} \left(G - \frac{1}{2} G g \right) = 0, \quad (\text{I.31})$$

dove g e G sono i tensori di componenti covarianti g_{ik} e G_{ik} .

Questa proprietà impone un'equazione tensoriale che può essere chiamata giustamente equazione fondamentale della Dinamica Relativistica di un mezzo

²⁹della 4-velocità.

³⁰Cf. J. L. Synge, *Relativistic Hydrodynamics*, Proc. London Math. Soc., série 2, vol. 43, 1937.

continuo,

$$\operatorname{div} T = 0, \quad (\text{I.32})$$

per la quale la divergenza del tensore energetico è nulla.

Questa equazione tensoriale rimpiazza, in forma condensata, le quattro equazioni che esprimono i principi classici della conservazione dell'energia e della quantità di moto: da ciò deduciamo un'importante conseguenza riguardo le linee di flusso, come vedremo aiutandoci con i principi base del calcolo differenziale assoluto.

Infatti possiamo scrivere l'equazione (I.32) nella forma

$$\sum_{k=0}^3 T_{ik}^{|k} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

o anche

$$\sum_{k,l=0}^3 g^{kl} T_{ik|l} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{I.32}')$$

dove $T_{ik}^{|k}$, $T_{ik|l}$ designano, rispettivamente, le derivate controvarianti e covarianti del tensore T .

Sostituendo l'espressione (I.29) di T_{ik} , si ha

$$\lambda_i \sum_{k,l=0}^3 g^{kl} \lambda_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^l} + \varepsilon \lambda_i \sum_{k=0}^3 \lambda_k^{|k} + \varepsilon \sum_{l=0}^3 \lambda_{i|l} \lambda^l = 0,$$

o ancora

$$\lambda_i \left(\sum_{k=0}^3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^k} \lambda^k + \sum_{k=0}^3 \lambda_k^{|k} \right) + \varepsilon \sum_{l=0}^3 \lambda_{i|l} \lambda^l = 0,$$

e infine, ponendo $p_i = \sum_{l=0}^3 \lambda_{i|l} \lambda^l$,

$$\lambda_i \operatorname{div}(\varepsilon \lambda) + \varepsilon p_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{I.33})$$

dove le p_i sono le componenti covarianti della curvatura geodetica p delle linee orarie.

Questo vettore p , come è ben noto e come risulta d'altronde dall'espressione formale delle sue componenti covarianti p_i , è semplicemente la derivata vettoriale lungo la linea oraria del suo vettore tangente λ : è normale alla linea ed ha come lunghezza la sua curvatura scalare.³¹

³¹Levi-Civita, *The Absolute Differential Calculus*, pp. 135, 139-140; anche: De Donder, *Théorie des champs gravifiques*, *Mém. Sc. Math.*, 14, Paris, Gauthier-Villars, 1926. pp. 12-16.

Infatti, il vettore p è normale a λ in ogni caso; quindi, moltiplicando per λ^i e sommando, si ottiene dalla (I.33)

$$\operatorname{div}(\varepsilon\lambda) = 0,$$

che è l'equazione di continuità per il nostro flusso gravitazionale. Quindi, le equazioni (I.33) diventano

$$\varepsilon p_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{I.26}')$$

da cui concludiamo, per $\varepsilon \neq 0$, che tutte le componenti del vettore p si annullano simultaneamente, ovvero, la proprietà geodetica delle linee orarie che può essere espressa anche dalle equazioni controvarianti

$$p_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3). \quad (\text{I.26})$$

Nello spazio vuoto si ha $\varepsilon = 0$; dunque le linee d'universo sono prive di significato, e le ultime equazioni sono identicamente soddisfatte.

I.3.4 Una riconsiderazione del principio geodetico per ogni elemento del mezzo

I principi di conservazione e la forma canonica del tensore T implicano, dunque, considerando un flusso nello spazio-tempo, le seguenti conseguenze:

- a) le linee orarie sono geodetiche, o, più precisamente, la congruenza delle linee orarie è geodetica;
- b) lungo queste linee, esiste un flusso di materia perfetta che si conserva.

Si noti che la prima conclusione dipende dalla forma canonica (I.29) o (I.29') del tensore T .

Questi particolari postulati, che sono abbastanza indicativi e forniscono, per così dire, una teoria provvisoria per questa categoria di fenomeni dove essi sono separati da tutti gli altri, assumono pieno significato se collegati alla teoria della Relatività Generale.

Bisogna allora stabilire, o ri-stabilire, una completa interdipendenza tra tutti i fenomeni fisici coinvolti, minimizzando, tuttavia, la categoria dei fenomeni in considerazione, collegando i parametri matematici che li definiscono attraverso un numero sufficientemente grande di equazioni per determinarli con uno schema teorico fornito dalla teoria della Relatività Generale.

Capitolo II

Natura analitica delle equazioni del moto gravitazionale di un mezzo continuo disaggregato

II.1 Funzioni incognite ed equazioni

II.1.1 Premesse

Siamo ora interessati a sviluppare in maniera semplice il programma stabilito nelle ultime righe della sezione precedente, limitandoci a considerare la materia perfetta¹ in moto in quello che in Meccanica newtoniana chiameremo un campo (all'inizio non noto), generato dal moto della materia stessa e che, di certo, governa a sua volta.

Ne emerge così un problema ridotto della Relatività generale, seguendo l'esempio di ciò che vien fatto molto più semplicemente in Meccanica celeste, trascurando una serie di circostanze reali e limitandoci a considerare le basi teoriche di quelli che consideriamo gli elementi essenziali del fenomeno.

Dal punto di vista matematico, essi sono la metrica dello spazio-tempo e la

¹ *Materia perfetta*: intesa come fluido perfetto disaggregato, cioè senza sforzi interni, come definita nella sezione I.3.2. -ndt

congruenza delle linee orarie.

Le quantità necessarie a determinarle sono:

- a) i dieci coefficienti g_{ik} del ds^2 ;
- b) i quattro parametri λ^i della congruenza, legati a quelli di g attraverso un'equazione quadratica, o momenti λ_i (o una combinazione qualsiasi di queste quantità);
- c) la densità ε dell'entità fisica alla quale il flusso è collegato.

In totale, quattordici incognite.

Naturalmente (in aggiunta alla summenzionata relazione in termini finiti) abbiamo quattordici equazioni differenziali alle derivate parziali, indispensabili per determinare queste quattordici quantità.

Esse sono le dieci equazioni di Einstein

$$G_{ik} - \frac{1}{2}Gg_{ik} = -\chi T_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3), \quad (I.27)$$

le equazioni (di conservazione)

$$p^i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (I.26)$$

che invocano la proprietà geodesica delle linee orarie e che possono essere ridotte a tre grazie all'identità

$$\sum_{i=0}^3 p_i \lambda^i = 0$$

e l'equazione di conservazione

$$\text{div}(\varepsilon \lambda) = 0. \quad (I.19)$$

L'equazione in termini finiti, richiamata sopra, esprime, potremmo dire, il fatto che il vettore λ è unitario e si scrive

$$\sum_{i,k=0}^3 g_{ik} \lambda^i \lambda^k = 1. \quad (II.1)$$

Possiamo dare una forma leggermente diversa alle equazioni di Einstein introducendo le quantità seguenti

$$\tau_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2}Tg_{ik} \quad (II.2)$$

dove

$$T = \sum_{i,k=0}^3 g^{ik} T_{ik} \quad (\text{II.3})$$

è l'invariante lineare del tensore T .

Moltiplicando le equazioni (I.27) per g^{ik} e sommando² sugli indici i, k si ottiene

$$G = \chi T \quad (\text{II.4})$$

e di conseguenza

$$G_{ik} = -\chi \tau_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{II.5})$$

dove, nel nostro caso,

$$\tau_{ik} = \varepsilon \left(\lambda_i \lambda_k - \frac{1}{2} g_{ik} \right) \quad (\text{II.6})$$

perché si ha che

$$T = \sum_{i,k=0}^3 g^{ik} \varepsilon \lambda_i \lambda_k = \varepsilon.$$

II.1.2 Sistemi normali di equazioni differenziali alle derivate parziali. Indicazioni bibliografiche

Rivolgiamo ora la nostra attenzione alle equazioni di Einstein dove, come abbiamo già osservato, le funzioni incognite g_{ik} appaiono esplicitamente nei G_{ik} come combinazione delle loro derivate prime e seconde. I G_{ik} sono lineari rispetto a quest'ultime derivate: tuttavia le G_{ik} non sono globalmente lineari. Possiamo affermare l'esistenza di soluzioni di tali equazioni con un'opportuna scelta delle altre funzioni incognite del problema?

Per affrontare la questione, dobbiamo rivedere³ qualche nozione generale riguardo i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma⁴

$$\sum_{v=1}^m \sum_{i,k=0}^n F_{\mu v}^{ik} \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial x^i \partial x^k} + \Phi_\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m), \quad (\text{II.6})$$

²Tenendo conto che $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$, dalla (I.27) risulta $\underbrace{G_{ik}g^{ik}}_{=G} - \frac{1}{2}4G = -G = -\chi T$. -ndt

³Cf. Levi-Civita, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Bologna, Zanichelli, 1931; anche: Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*, Paris, Hermann, 1903.

⁴In letteratura contemporanea tali sistemi di PDE sono detti *quasi-lineari*. -ndt

dove le x^i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) giocano il ruolo di variabili indipendenti e le φ_v ($v = 1, 2, \dots, m$) di funzioni incognite. I coefficienti $F_{\mu\nu}^{ik}$ e le funzioni Φ_μ dipendono da x , da φ e dalle loro derivate prime.

Mettendo in evidenza le derivate seconde rispetto a una sola delle variabili indipendenti, per esempio x^0 e omettendo tutte le altre, ci limiteremo a scrivere

$$\sum_{v=1}^m F_{\mu\nu}^{00} \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial x^0{}^2} + \dots = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m); \quad (\text{II.6}')$$

queste equazioni sono risolvibili rispetto a $\frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial x^0{}^2}$, se il determinante Ω degli $F_{\mu\nu}^{00}$ è diverso da zero. In tal caso, diciamo che il sistema è *normale rispetto a x^0* . Se ora assumiamo che ogni funzione coinvolta sia analitica, possiamo applicare il teorema di Cauchy-Kowalewski e ne segue localmente (nel senso usuale ben noto) la determinazione univoca delle funzioni φ in un intorno di un valore particolare della variabile x^0 o, in un linguaggio geometrico, in un intorno di un piano

$$x^0 = \bar{x}^0$$

denominato *superficie portante* dei dati.

È facile vedere sotto quali condizioni sia preservato il carattere normale delle equazioni, qualora si applichi un cambio di variabili, cosicchè la varietà portante, invece del piano x^0 eguagliato ad una certa costante, risulta un'arbitraria superficie n -dimensionale

$$z(x^0, x^1, \dots, x^n) = \text{cost.}$$

Infatti, ponendo

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x^i} \quad (\text{II.7})$$

e

$$\omega_{\mu\nu} = \sum_{i,k=0}^n F_{\mu\nu}^{ik} p_i p_k, \quad (\text{II.8})$$

il sistema è normale rispetto a z , a patto che il determinante

$$\Omega = \| \omega_{\mu\nu} \| \quad (\text{II.9})$$

non sia identicamente nullo.

II.1.3 Applicazione della teoria generale al presente caso. Evidenza della non-normalità dovuta necessariamente all'invarianza generale del sistema

Ora si può mostrare che nel nostro caso, a causa dell'identità tensoriale

$$\operatorname{div} E = 0, \quad (\text{II.10})$$

dove

$$E = G - \frac{1}{2} Gg \quad (\text{II.11})$$

è il tensore gravitazionale, il sistema di Einstein non è normale rispetto al tempo x^0 , persino nel caso più semplice dove le funzioni T_{ik} sono completamente assegnate in funzione delle variabili x : *a fortiori* quindi nel caso che ci interessa.

Per dimostrarlo, è sufficiente considerare nell'espressione delle componenti E_{ik} del tensore E , l'insieme dei termini lineari nelle derivate seconde delle g_{ik} che, attraverso un calcolo che qui omettiamo (ma che svilupperemo nel Capitolo seguente), è

$$\begin{aligned} E_{ik} = E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{jh} g^{jh} & \left(\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{ih}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^h} \right) \\ & - \frac{1}{2} g_{ik} \sum_{ljhr} g^{lr} g^{jh} \left(\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^l \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{jr}}{\partial x^l \partial x^h} \right) + \dots \quad (\text{II.12}) \end{aligned}$$

Quando effettuiamo un cambio di variabili, sostituendo x^0 con una combinazione

$$z(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

le espressioni degli E_{ik} diventano

$$E'_{ik} = E'_{ki} = H \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial z^2} + (p_i p_k - H g_{ik}) \chi - (p_i \gamma_k + p_k \gamma_i) + g_{ik} \gamma, \quad (\text{II.12}')$$

avendo posto

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^3 g^{ik} p_i p_k, \\ \chi &= \frac{1}{2} \sum_{j,h=0}^3 g^{jh} \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

$$\gamma_k = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 p^j \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial z^2},$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 p^k \gamma_k.$$

Ora, l'identità tensoriale (II.10) è espressa dalle quattro identità

$$\sum_{k=0}^3 E_{lk}^{[k]} = 0, \quad (\text{II.10}')$$

dove il simbolo di differenziazione controvariante è un operatore la cui parte differenziale si riduce a

$$\sum_{l=0}^3 g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Quindi, se in particolare consideriamo le derivate seconde rispetto a z , la parte di E_{ik} che dipende da esse è E'_{ik} e l'operatore si riduce a

$$\sum_{l=0}^3 g^{kl} p_l \frac{\partial}{\partial z} = p^k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ora l'identità (II.10') diventa

$$\sum_0^3 p^k E''_{ik} + \dots = 0, \quad (\text{II.10}'')$$

dove solo i termini esplicitati contengono le derivate terze delle g , dal momento che le espressioni E''_{ik} si ottengono da E'_{ik} sostituendo le derivate seconde delle g (rispetto a z) con le derivate terze.

Nella (II.10'') i coefficienti delle suddette derivate terze si annullano, perché così avviene per le derivate seconde nell'espressione

$$\sum_{k=0}^3 p^k E'_{ik}.$$

Da questo concludiamo che

$$\sum_{h=0}^3 p^h E'_{ik} = 0, \quad (\text{II.13})$$

che dimostra che il sistema considerato non è normale, ovvero, non è risolubile rispetto alle derivate seconde $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial z^2}$ di tutte le g rispetto alle z .

Più precisamente, si potrebbe mostrare che il determinante delle E'_{ik} rispetto alle

$$\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial z^2}$$

possiede, al più, caratteristica (algebraica) $10 - 4 = 6$.

II.2 Coordinate isometriche. Riduzione alla forma normale

II.2.1 Il caso speciale di Einstein. Artificio analitico di De Donder e interpretazione geometrica di Lanczós

Accanto alle circostanze sfavorevoli appena stabilite dobbiamo mettere in evidenza la proprietà essenziale delle equazioni di essere invarianti rispetto ad un arbitrario cambio di variabili x o, se si preferisce, di esser valide per una qualsiasi scelta di coordinate dello spazio-tempo.

Seguendo questa osservazione, c'è ragione di chiedersi se non sia possibile introdurre delle variabili x tali che il sistema diventi normale.

Se tali coordinate esistessero davvero, potremmo dedurre l'esistenza delle soluzioni.

Einstein⁵ per primo, nel 1918 ha integrato le sue equazioni (per metriche infinitesimamente vicine alla Relatività ristretta) usando un sistema particolare di coordinate introdotte per soddisfare quattro ulteriori equazioni il cui significato non era evidente.

De Donder⁶ riprese la questione, formulando precisamente le particolari coordinate che permettono di affrontare il problema dell'integrazione, ma ponendosi da un punto di vista strettamente analitico. Un po' più tardi, Lanczós⁷ ha ritrovato le coordinate di De Donder in una forma leggermente diversa e ne ha dato una rimarchevole spiegazione geometrica.

Ecco la procedura De Donder-Lanczós.

⁵Einstein, *Sitzungsb.*, Berlin, 1916, 688-696; *ibid.*, 1918, 154-167.

⁶De Donder, *La gravifique einsteinienne et la Théorie des champs gravifiques*. *Mém. Sec. Math.* 14, Paris, Gauthier-Villars, 1926.

⁷K. Lanczós, *Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die Einsteinschen Gravitationsgleichungen* (Phys. Zeits., 1922); vedere anche una Nota di M. A. Finzi *Sulla riduzione a forma normale delle equazioni gravitazionali di Einstein* (Rend. Lincei, 1938, p.324-330).

Innanzitutto, richiamiamo la forma esplicita dei simboli di Christoffel del primo e secondo tipo⁸

$$\begin{bmatrix} i & h \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} \right),$$

$$\Gamma_{ik}^l = \sum_{h=0}^3 g^{hl} \begin{bmatrix} i & k \\ h \end{bmatrix}$$

e della divergenza $\square\Phi$ del tensore semplice⁹, le cui componenti covarianti sono le derivate prime della funzione Φ

$$\square\Phi = \sum_{i,k=0}^3 g^{ik} \Phi_{i|k} = \sum_{i,k=0}^3 g^{ik} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^k} - \sum_{l=0}^3 \Gamma_{ik}^l \frac{\partial \Phi}{\partial x^l} \right). \quad (\text{II.14})$$

Se la funzione Φ si riduce ad una delle variabili indipendenti x^j , si ha

$$\square x^j = - \sum_{i,k=0}^3 g^{ik} \Gamma_{ik}^j. \quad (\text{II.15})$$

Questo è il punto di partenza di Lanczós.

Convienne introdurre anche le combinazioni lineari delle $\square x^j$ considerate da De Donder

$$Z_i = \sum_{j=0}^3 g_{ij} \square x^j, \quad (\text{II.16})$$

cioè

$$Z_i = - \sum_{j=0}^3 g_{ij} \sum_{l,k=0}^3 g^{lk} \Gamma_{lk}^j = - \sum_{l,k=0}^3 g^{lk} \begin{bmatrix} l & k \\ i \end{bmatrix}. \quad (\text{II.16}')$$

Per dare a Z_i una forma più utile al nostro scopo, notiamo che

$$\begin{aligned} \square x^j &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{h=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^h} (\sqrt{-g} g^{hj}) \\ &= \sum_{h=0}^3 \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^h} + \sum_{h=0}^3 g^{hj} \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^h}. \end{aligned}$$

⁸La notazione attuale dei simboli di Christoffel del primo tipo è $[i j, k]$, invece di $\begin{bmatrix} i & j \\ k \end{bmatrix}$.-
ndt

⁹Il simbolo $\square$ è definitivamente chiamato D'Alembertiano, basato sulla metrica semi-riemanniana g . ndt

Quindi

$$Z_i = \sum_{h,j=0}^3 g_{ij} \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^h} + \sum_{h,j=0}^3 \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^h} g_{ij} g^{hj}.$$

Ora abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 g_{ij} g^{hj} &= \delta_{ih} = \begin{cases} 0 & (h \neq i), \\ 1 & (h = i); \end{cases} \\ \sum_{j=0}^3 g_{ij} \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^h} &= - \sum_{j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \end{aligned}$$

e infine

$$Z_i = \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^i} + \sum_{h,j=0}^3 g_{ij} \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^h} = \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^i} - \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}. \quad (\text{II.17})$$

Tenendo conto dell'identità

$$d \log \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^3 g^{ik} dg_{ik}$$

che risulta dalla regola della differenziazione del determinante della forma ds^2 , abbiamo¹⁰

$$\frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i}. \quad (\text{II.18})$$

Definiamo ora le espressioni

$$\mathfrak{L}_{ik} = \frac{\partial Z_i}{\partial x^k} + \frac{\partial Z_k}{\partial x^i}. \quad (\text{II.19})$$

Si ha

$$\frac{\partial Z_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^k} - \sum_{h,j=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \left(g^{hj} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right),$$

quindi

$$\mathfrak{L}_{ik} = 2 \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^k} - \sum_{h,j=0}^3 \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^h \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^h \partial x^i} \right) g^{hj} + \dots \quad (\text{II.20})$$

¹⁰Levi-Civita, *The Absolute Differential Calculus*, pp. 111-112. -ndt

esplicitando le derivate seconde di g che sono le sole ad interessarci.
Ora vogliamo calcolare le differenze

$$\bar{G}_{ik} = G_{ik} - \frac{1}{2} \mathfrak{L}_{ik} \quad (\text{II.21})$$

in particolare l'insieme dei termini di queste differenze dove sono coinvolte le derivate seconde di g .

Si ha

$$\sum_{h=0}^3 \Gamma_{ih}^h = \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \begin{bmatrix} i & h \\ j & \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i} = \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^i}$$

in virtù della formula (II.18) Dunque,

$$\begin{aligned} & \sum_{h=0}^3 \left(\frac{\partial \Gamma_{ih}^h}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^h}{\partial x^h} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{1}{2} \sum_{h,j=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^h} \left\{ g^{hj} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) \right\} \\ &= \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h \partial x^j} \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^h \partial x^k} - \frac{1}{2} \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^h \partial x^i} + \dots \end{aligned}$$

Di conseguenza, rimane

$$\bar{G}_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h \partial x^j} + \dots \quad (\text{II.22})$$

Inoltre,

$$\square g_{ik} = \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h \partial x^j} - \sum_{l=0}^3 \Gamma_{hj}^l \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) = \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h \partial x^j} + \dots$$

Quindi

$$G_{ik} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_i}{\partial x^k} + \frac{\partial Z_k}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2} \square g_{ik} + \dots, \quad (\text{II.23})$$

dove i termini omessi non contengono derivate seconde.

Così facendo abbiamo ottenuto l'importante risultato che ci eravamo proposti di raggiungere, seguendo De Donder: le componenti G_{ik} del tensore di curvatura di Ricci-Einstein¹¹ differiscono dalle espressioni

$$\frac{1}{2} \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h \partial x^j}$$

solo per termini che contengono unicamente le derivate prime delle funzioni g . Le condizioni di De Donder

$$Z_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (\text{II.24})$$

sono equivalenti a quelle di Lanczòs

$$\square x^i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{II.25})$$

ma queste ultime si prestano ad un'importante interpretazione geometrica. A tal fine, consideriamo le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine

$$\square \Phi = 0, \quad (\text{II.26})$$

calcolando l'operatore $\square$ secondo la metrica dello spazio-tempo.

Le superficie integrali di questa equazione sono varietà analoghe alle superfici isoterme degli spazi ordinari euclidei, o, se si è interessati ad una metrica non specifica dove la coordinata x^0 indica il tempo, alle superficie d'onda della propagazione governata dall'equazione

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 0, \quad (\text{II.27})$$

il cui primo membro è l'operatore $\square$.

Siano $\Phi_i = c_i$ quattro distinte famiglie di superficie integrali dell'equazione (II.26): possono ovviamente essere scelte in infiniti modi. Dunque è chiaro che avremo

$$\square x^i = 0,$$

quando prendiamo come nuove variabili x le Φ .

Queste condizioni generalizzano il carattere armonico delle coordinate cartesiane in una metrica euclidea; questo è il motivo per cui chiamiamo le variabili x che le soddisfano *isometriche*.

¹¹È ammirevole constatare la modestia e la generosità scientifica di Levi-Civita: infatti, questo tensore è invece oggi molto spesso chiamato 'tensore di Levi-Civita'. -ndt

II.2.2 La forma equivalente delle equazioni di Einstein

Possiamo a questo punto concludere che è lecito sostituire le equazioni di Einstein con le equazioni

$$\frac{1}{2}\square g_{ik} + \dots = -\chi\tau_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{II.28})$$

purché aggiungiamo le quattro equazioni supplementari

$$\square x^i = 0, \quad (\text{II.25})$$

oppure

$$Z_i = 0. \quad (\text{II.24})$$

II.2.3 La normalizzazione del sistema che include simultaneamente le equazioni di gravitazione e il principio geodetico

In breve, usando coordinate isometriche nelle equazioni precedenti abbiamo trascritto il nostro problema, in un sistema in coordinate isometriche:

$$\frac{1}{2}\square g_{ik} + \dots = -\chi\varepsilon\left(\lambda_i\lambda_k - \frac{1}{2}g_{ik}\right) \quad (i, k = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{I})$$

$$p_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{II})$$

$$\text{div}(\varepsilon\lambda) = 0, \quad (\text{III})$$

$$Q = \sum_{i,k=0}^3 g^{ik}\lambda_i\lambda_k = 1. \quad (\text{IV})$$

È facile vedere che questo sistema è *normale* e siamo dunque in grado di applicare il teorema di esistenza di Cauchy-Kowalewski.

Il sistema caratterizza l'evoluzione delle funzioni incognite g, λ, ε , quando i valori delle funzioni stesse e delle loro derivate prime sono dati su una superficie non-caratteristica¹², oppure ponendo le funzioni incognite, all'istante iniziale x^0 , come funzioni arbitrarie nelle variabili x^1, x^2, x^3 .

¹²Levi-Civita, *loc. cit.*, p. 28.

È opportuno comunque osservare che queste funzioni arbitrarie devono soddisfare la condizione

$$\sum_{i,k=0}^3 g^{ik} \lambda_i \lambda_k = 1 \quad (\text{II.1})$$

in tutto lo spazio.

Ciò diventerà alquanto banale dall'identità

$$\frac{dQ}{ds} = 0 \quad (\text{II.29})$$

che stiamo per dimostrare.

In verità, dobbiamo verificare che la derivata $\frac{dQ}{ds}$ è nulla, se si tiene conto delle equazioni delle geodetiche.

Si ha

$$\frac{dQ}{ds} = \sum_{i,k=0}^3 \lambda^k \left(\frac{dg_{ik}}{ds} \lambda^i + 2g_{ik} \frac{d\lambda_i}{ds} \right),$$

o, in virtù delle equazioni (I.23)

$$\frac{dQ}{ds} = \sum_{i,k=0}^3 \lambda^i \lambda^k \frac{dg_{ik}}{ds} - \sum_{i,k,j,h=0}^3 2g_{ik} \Gamma_{jh}^i \lambda^h \lambda^k \lambda^j.$$

Ma vale

$$\sum_{i=0}^3 g_{ik} \Gamma_{jh}^i = \begin{bmatrix} j & h \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} \right),$$

e così, anche la seconda sommatoria dell'espressione che fornisce $\frac{dQ}{ds}$ diventa

$$\sum_{h,k,j=0}^3 \lambda^h \lambda^k \lambda^j \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} \right) = \sum_{h,k,j=0}^3 \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} \lambda^h \lambda^k \lambda^j$$

e abbiamo

$$\frac{dQ}{ds} = \sum_{i,k=0}^3 \frac{dg_{ik}}{ds} \lambda^i \lambda^k - \sum_{h,k,j=0}^3 \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} \lambda^h \lambda^k \lambda^j = 0,$$

dal momento che

$$\frac{dg_{ik}}{ds} = \sum_{j=0}^3 \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \lambda^j.$$

Poiché $\frac{dQ}{ds}$ è nullo, Q rimarrà costante lungo le linee orarie. È pertanto sufficiente scegliere $Q = 1$ sulla superficie portante dei dati $x^0 = \bar{x}_0$, per avere $Q = 1$

sarà in tutto lo spazio.

Q.E.D.

Così arriviamo alla conclusione fondamentale che, *in coordinate isometriche, l'assegnazione dei valori iniziali delle incognite, sotto la condizione appena stabilita, determina in un unico modo la metrica ed il flusso, aventi come linee di corrente le geodetiche nello spazio-tempo.*

Capitolo III

Criteri di approssimazione ed equazioni ridotte

III.1 Ordini di grandezza e uso intensivo di quantità adimensionali

III.1.1 Stime numeriche

Dal momento che il nostro obiettivo è il problema degli n -corpi, conviene seguire le indicazioni di Droste-De Sitter, ma senza eliminare *a priori* ciò che, nel caso di ogni corpo, nasce intrinsecamente dal corpo stesso. Proveremo a sviluppare i passaggi logici, evitando allo stesso tempo complicazioni superflue, con l'aiuto di qualche ipotesi qualitativa complementare, da usare a fianco all'approssimazione principale che proviene dalla piccolezza delle velocità dei corpi celesti comparata a quella della luce, approssimazione usata da Einstein e dai suoi continuatori e allievi.

È molto importante precisare le circostanze precedentemente emerse riguardo l'ordine di grandezza sotto le quali affronteremo, semplificheremo e risolveremo il problema.

In primo luogo, come abbiamo già affermato nella prefazione, ci accontenteremo, di arrivare, nelle equazioni differenziali del moto, alla seconda approssimazione.

Ricordiamo cosa intendiamo con questo.

Nei problemi che ci interessano, l'ordine di grandezza delle quantità meccaniche, ovvero energia cinetica e potenziale, è quello del nostro sistema planetario.

Per i movimenti di questo sistema, v^2 (il quadrato della velocità del Sole, di un pianeta, o di un qualsiasi satellite, cioè, il doppio dell'energia cinetica assumendo l'unità di massa) è molto piccolo rispetto al quadrato della velocità della luce c^2 e l'ordine di grandezza del rapporto

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

è 10^{-8} nel caso della Terra ed è di questo ordine di grandezza - o inferiore - per gli altri corpi nel sistema solare.

Lo stesso si ha per il valore del potenziale newtoniano del sistema, sia all'esterno, o persino all'interno del Sole, dei pianeti o dei satelliti. Potrebbe essere utile illustrare queste osservazioni con un calcolo che proviene dalla teoria del potenziale.

Sia S lo spazio occupato dai corpi C_h ($h = 0, 1, \dots, n-1$) in studio e sia μ la funzione che rappresenta la densità locale.

In ciò che seguirà, avremo più volte occasione di considerare l'operatore B che consiste nel formare l'integrale

$$\gamma = B\mu = \int_S \frac{f\mu}{c^2 r} ds = \sum_{h=1}^3 \int_{C_h} \frac{f\mu}{c^2 r} dC_h. \quad (\text{III.1})$$

Questa è un'operazione fondamentale (per questo la indichiamo con B): essa associa una grandezza γ di dimensione zero (un numero puro) alla densità μ .

Se μ_h è il massimo di μ in C_h , si ha

$$B\mu \leq \sum_{h=1}^3 \frac{f\mu_h}{c^2} \int_{C_h} \frac{dC_h}{r}. \quad (\text{III.2})$$

Ricordiamo ora l'espressione del potenziale di una sfera omogenea di raggio R e massa M .

$$U = \begin{cases} \frac{fM}{r} & \text{all'esterno,} \\ 2\pi f\mu R^2 - \frac{2}{3}\pi f\mu r^2 \leq \frac{3}{2}f\frac{M}{R} & \text{all'interno.} \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Quindi ovunque

$$U \leq \frac{3}{2}f\frac{M}{R} \quad (\text{III.3})$$

e ancora

$$B\mu \leq \frac{3}{2} \sum_{h=0}^n \frac{fM_h}{c^2 R_h} = \frac{3}{2} \sum_{h=1}^n \frac{fM_\odot}{c^2 R_\odot} \frac{M_h}{M_\odot} : \frac{R_h}{R_\odot}, \quad (\text{III.4})$$

dove $R_{\odot}$, $M_{\odot}$ designano, rispettivamente, il raggio e la massa del Sole. Si può anche scrivere¹

$$B\mu \leq \frac{2f}{c^2} \sum_{h=1}^n \mu_h R_h^2 = \frac{2f}{c^2} \sum_{h=1}^n \frac{\mu_h}{\mu_{\odot}} \left(\frac{R_h}{R_{\odot}} \right)^2 : \frac{1}{\mu_{\odot} R_{\odot}^2}.$$

Tenendo conto del fatto che (per il nostro sistema planetario) possiamo assumere che le μ_h abbiano un ordine di grandezza al più comparabile a $\mu_{\odot}$ e gli R_h comparabili a $R_{\odot}$, segue² che γ è dell'ordine di 10^{-6} .

III.1.2 Ipotesi qualitative e semplificazioni che ne risultano. Definizione dell'ordine di approssimazione

Chiameremo 'del primo ordine' i termini che sono numeri puri il cui ordine di grandezza corrisponde a quello di

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \quad (\text{III.5})$$

o anche di

$$\gamma. \quad (\text{III.6})$$

Una prima approssimazione consiste nel trascurare i termini di ordine superiore.

In accordo con ciò, trascureremo sistematicamente, in tutte le relazioni, termini quali β^3 o $\beta\gamma$, ecc., rispetto a uno, a patto che, se i termini preponderanti in una formula hanno un certo ordine minimo v , sarà necessario mantenere, con loro, solamente tutto ciò che non è di grado maggiore di $v + 1$.

D'altra parte, allo scopo di semplificare quanto più possibile, è di aiuto naturalmente ricorrere alle coordinate isometriche (cf. Capitolo II, Sezione 2) cosicché l'elemento ds^2 rimane molto vicino al ds_0^2 della Relatività ristretta, che ha, come è ben noto, la forma pseudo-euclidea:

$$ds_0^2 = dx^{0^2} - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}), \quad (\text{III.7})$$

dove

$$x^0 = ct \quad (\text{III.8})$$

¹Semplicemente si usa il fatto che $M_h = \mu_h \frac{4}{3} \pi R_h^3$. Nella formula così ottenuta, l'A. ha trascurato π . -ndt

²Con la disuguaglianza appena ottenuta e alcuni dati: $\mu_{\odot} \approx 1,408 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$; $R_{\odot} \approx 0,7 \cdot 10^9 \text{ m}$; $f \approx 6,675 \cdot 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}$; $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$. -ndt

è semplicemente quello che Levi-Civita chiama tempo römeriano³, e x^1, x^2, x^3 sono coordinate ortogonali cartesiane.

Assumiamo, allora, che la metrica dello spazio-tempo coinvolga coordinate x^i molto vicine allo spazio pseudo-euclideo, nel senso che i coefficienti g_{ik} differiscono dai valori

$$g_{ik}^0 = \begin{cases} \pm 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k), \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

corrispondenti a ds_0^2 , per delle quantità $-2\gamma_{ik}$,

$$g_{ik} = g_{ik}^0 - 2\gamma_{ik},$$

che siano almeno del primo ordine, nonostante la presenza dei γ_{0i} di ordine non minore⁴ di $\frac{3}{2}$.

Per tenere conto nelle equazioni del moto dei termini immediatamente superiori rispetto all'approssimazione newtoniana, è sufficiente, come Einstein notò per primo, calcolare la parte preponderante di ordine minimo, di tutti i γ_{ik} , con l'eccezione, tuttavia, di γ_{00} , per cui è necessario esplicitare non solo il primo ordine, ma anche il secondo⁵.

Seguendo Eisenhart⁶, useremo il simbolo

$$e_i = \begin{cases} 1 & (i = 0), \\ -1 & (i \neq 0), \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

che ci permette di scrivere in una forma sintetica

$$ds_0^2 = \sum_{i=0}^3 e_i dx^i{}^2. \quad (\text{III.7'})$$

Possiamo dunque considerare

$$g_{ik} = \delta_{ik} e_i - 2\gamma_{ik}, \quad (\text{III.11})$$

stimando γ_{ik} del primo ordine (almeno) e γ_{0i} ($i > 0$) almeno di ordine $\frac{3}{2}$.

³Cf. *Absolute Differential Calculus*, p. 307.

⁴Infatti, se γ_{0i} fosse del primo ordine, la differenza delle velocità di propagazione della luce che si muove in due direzioni da un singolo punto dovrebbe anche lei essere del primo ordine. Esperimenti ottici, tuttavia, non hanno confermato essere questo il caso, e ciò elimina le ipotesi. (Cf. Levi-Civita, *loc. cit.*, p. 369).

⁵Cf. Levi-Civita, *loc. cit.*, p. 370.

⁶*Riemann Geometry*, Princeton University Press, 1926. Cap. II.

III.1.3 Altre origini di riduzione

Introdurremo ora l'approssimazione stabilita sopra nelle equazioni del sistema (I).

Notiamo subito che nell'approssimazione di ordine zero, per gli elementi reciproci $(g^{ik})^0$ vale

$$(g^{ik})^0 = g_{ik}^0 = \delta_{ik} e_i, \quad (\text{III.12})$$

il che si vede facilmente verificando le identità

$$\sum_{j=0}^3 (g^{ij})^0 g_{jk}^0 = \delta_{ik}$$

sostituendo direttamente i valori indicati.

Infatti, si ha identicamente

$$\sum_{j=0}^3 \delta_{jk} e_k \delta_{ij} e_i = e_i e_k \sum_{j=0}^3 \delta_{jk} \delta_{ji} = \delta_{ik} e_i e_k = \delta_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

Per le quantità

$$\beta_i = \frac{dx^i}{dx^0} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{III.13})$$

notiamo che esse sono nulle in prima approssimazione quando consideriamo moti molto lenti.

Lo stesso ragionamento si applica per le funzioni λ^i ($i = 1, 2, 3$), mentre abbiamo $\lambda^0 = 1$.

Per avere la stessa approssimazione in tutte le equazioni del problema, dobbiamo tenere conto che le nostre incognite dipendano molto meno da x^0 rispetto alle variabili x^i ($i > 0$), nel senso che, se ammettiamo (come avviene precisamente nel nostro caso) che una quantità f dipende dal tempo solo attraverso il movimento di alcuni punti P_v , dei quali f è una funzione, si ha necessariamente

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x^0} \right| \leq \sum |\beta_{iv}| \left| \frac{\partial f}{\partial x^i} \right| \quad (i > 0),$$

dove il simbolo $\sum$ si riferisce ovviamente alle differenti coordinate spaziali di ognuno di questi punti.

Se la velocità di questi punti è dell'ordine di β , le derivate temporali sono anch'esse di quell'ordine relativamente alle derivate locali.

Per quanto concerne la densità μ , la sua distribuzione iniziale μ^0 (comunque arbitraria) costituisce l'approssimazione di ordine zero.

Qualsiasi successiva approssimazione dovrà naturalmente essere espressa in termini finiti attraverso μ^0 e delle approssimazioni precedenti di γ e β . In seguito, denoteremo con il segno $\bigcirc[n]$ un insieme di termini di ordine almeno n .

III.1.4 Formule che approssimano il ds^2 e i momenti delle linee orarie

Avendo posto quanto detto sopra, e tenendo conto del fatto che i β_i ($i > 0$) sono di ordine $\frac{1}{2}$, consideriamo l'intervallo

$$ds^2 = \sum_{i,k=0}^3 g_{ik} dx^i dx^k \quad (I.5)$$

che può essere riscritto nella forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^{0^2} \left(g_{00} + 2 \sum_{i=1}^3 g_{0i} \frac{dx^i}{dx^0} + \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} \frac{dx^i}{dx^0} \frac{dx^k}{dx^0} \right) \\ &= dx^{0^2} (1 - 2\gamma_{00} - \beta^2 + \bigcirc[2]), \end{aligned} \quad (I.5')$$

perché (Sezione 2 di questo Capitolo), i g_{0i} sono di ordine almeno $\frac{3}{2}$; e per calcolare la somma

$$\sum_{i,k=0}^3 g_{ik} \beta_i \beta_k$$

basta sostituire ai g_{ik} i valori dell'approssimazione zero g_{ik}^0 e ai β i valori indicati nella Sezione 3.

Si ha quindi

$$\left(\frac{ds}{dx^0} \right)^2 = 1 - 2\gamma_{00} - \beta^2 + \bigcirc[2],$$

da cui deduciamo precisamente ⁷

$$\frac{ds}{dx^0} = 1 - \gamma_{00} - \frac{1}{2}\beta^2 + \bigcirc[2]. \quad (III.14)$$

Inoltre, abbiamo

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^3 g_{ij} \frac{dx^j}{ds} = \sum_{j=0}^3 \delta_{ij} e_i \frac{dx^j}{ds} + \bigcirc[1] = e_i \frac{dx^i}{ds} + \bigcirc[1]. \quad (III.15)$$

⁷Posto $x := -2\gamma_{00} - \beta^2$, l'equazione seguente si ottiene calcolando lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ della funzione $\sqrt{1+x}$, che è $1 + \frac{x}{2} + \bigcirc[2]$. -ndt

Per i calcoli successivi, dovremo valutare il termine del secondo ordine di γ_{00} , ed è per questo che nelle formule utilizzate per questo scopo porremo

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \sum_j g_{0j} \lambda^j = g_{00} \frac{dx^0}{ds} + \mathcal{O}[2] = \\ &= (1 - 2\gamma) \left(1 + \gamma + \frac{1}{2} \beta^2 \right) + \mathcal{O}[2].\end{aligned}\tag{III.15'}$$

III.1.5 Formule che approssimano il tensore dell'energia

Si ha

$$\tau_{ik} = \varepsilon \left(\lambda_i \lambda_k - \frac{1}{2} g_{ik} \right) = \varepsilon \left(e_i e_k \lambda^i \lambda^k - \frac{1}{2} \delta_{ik} e_i \right) + \mathcal{O}[1] \quad (i > 0, k > 0).$$

Dunque

$$\begin{cases} \tau_{0i} = \varepsilon e_i \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^i}{ds} = -\varepsilon \frac{dx^i}{dx^0} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 = \\ \quad = -\varepsilon \beta_i + \mathcal{O}[1] \quad (i > 0), \\ \tau_{ik} = \frac{1}{2} \delta_{ik} \varepsilon + \mathcal{O}[1] \quad (i > 0, k > 0). \end{cases}\tag{III.16}$$

Più precisamente

$$\tau_{ik} = \mathcal{O}[1] \quad (i \neq k, i > 0, k > 0),\tag{III.16'}$$

$$\tau_{ii} = \frac{1}{2} \varepsilon + \mathcal{O}[1].\tag{III.17}$$

Ora dobbiamo proseguire l'approssimazione, per procurarci l'espressione di τ_{00} , fino al primo ordine (trascurando i termini di ordine superiore al primo).

Per fare ciò ritorniamo all'espressione generale appena scritta

$$\tau_{00} = \varepsilon \left(\lambda_0^2 - \frac{1}{2} g_{00} \right)\tag{III.17'}$$

e sostituiamo l'espressione (III.15') di λ_0 e (III.11) di g_{00} . Troviamo

$$\begin{aligned}\tau_{00} &= \varepsilon \left[(1 - 4\gamma)(1 + 2\gamma + \beta^2) - \frac{1}{2} + \gamma \right] = \\ &= \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \beta^2 - \gamma \right) + \mathcal{O}[2].\end{aligned}\tag{III.18}$$

III.1.6 L'operatore $\square\Phi$ di una funzione Φ del primo ordine

Vale

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{j=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{-g} \Phi^j), \quad (\text{III.19})$$

dove

$$\begin{aligned} \Phi^j &= \sum_{k=0}^3 g^{jk} \Phi_k = \sum_{k=0}^3 (\delta_{jk} e_j + \mathcal{O}[1]) \Phi_k = \sum_{k=0}^3 \delta_{kj} e_j \Phi_k + \mathcal{O}[2] \\ &= e_j \Phi_j + \mathcal{O}[2]. \end{aligned}$$

Dunque

$$\square\Phi = \sum_{j=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} (e_j \Phi_j) + \mathcal{O}[2] = \square^0\Phi + \mathcal{O}[2], \quad (\text{III.20})$$

dove

$$\square^0\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^{02}} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^{i2}} \quad (\text{III.21})$$

è la divergenza di Φ calcolata in termini della metrica di Einstein-Minkowski.

III.2 Riduzione delle equazioni e integrazione con l'uso di potenziali

III.2.1 Le equazioni di Einstein

Abbiamo già notato che la parte delle componenti G_{ik} del tensore di curvatura contenenti derivate seconde delle g si riduce a

$$\bar{G}_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h \partial x^j} + \dots \quad (\text{II.22})$$

Inoltre, poiché l'espressione esplicita dei G_{ik} è, come ben noto,

$$G_{ik} = G_{ik}^{(1)} + G_{ik}^{(2)},$$

dove

$$G_{ik}^{(1)} = \sum_{h=0}^3 \left(\frac{\partial \Gamma_{ih}^h}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^h} \right),$$

$$G_{ik}^{(2)} = - \sum_{h,l=0}^3 (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{hl}^h - \Gamma_{ih}^l \Gamma_{kl}^h),$$

riconosciamo immediatamente che i simboli di Christoffel del secondo tipo, in seguito alle espressioni (III.11) dei g_{ik}

$$g_{ik} = \delta_{ik} e_i - 2\gamma_{ik}$$

e al fatto fondamentale che i γ_{ik} devono essere considerati almeno del primo ordine, sono almeno del primo ordine, da cui segue che $G_{ik}^{(2)}$ è una quantità del secondo ordine.

Notiamo ancora che, siccome i termini omessi dell'espressione (II.20) di $\mathfrak{L}_{ik}$

$$- \sum_{h,j=0}^3 \left(\frac{\partial g^{hj}}{\partial x^k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^i} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^h} \right)$$

non contengono derivate seconde, essi sono ugualmente almeno del secondo ordine.

Di conseguenza, si è certi che i termini omessi dall'equazione (II.23) sono almeno del secondo ordine, così si può scrivere

$$G_{ik} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_i}{\partial x^k} + \frac{\partial Z_k}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2} \square g_{ik} + \mathcal{O}[2].$$

In seguito, grazie alla valutazione dell'operatore $\square$ in considerazione, le equazioni di Einstein diventano in coordinate isometriche, escludendo i termini superiori al primo ordine, se gli indici non sono simultaneamente nulli,

$$-\square^0 \gamma_{ik} + \chi \tau_{ik} = 0. \quad (\text{III.22})$$

Se notiamo che la differenziazione rispetto ad x_0 incrementa di $\frac{1}{2}$ l'ordine della quantità in questione, possiamo sostituire l'operatore laplaciano Δ_2^0 (calcolato secondo una metrica euclidea) al posto di $-\square^0$, e le equazioni, di conseguenza, diventano, trascurando ancora ogni cosa oltre il primo ordine,

$$\Delta_2^0 \gamma_{ik} = -\chi \tau_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{III.23})$$

dove le espressioni di τ_{ik} sono date dalle formule precedenti.

Enfatizziamo esplicitamente ancora una volta che l'equazione corrispondente agli indici $i = k = 0$ deve essere studiata separatamente, perché bisogna anche tenere in conto dei termini del secondo ordine se si vuole ottenere da essi γ_0 *fino al secondo ordine compreso*.

III.2.2 Integrazione delle equazioni che definiscono i γ_{ik} fino al secondo ordine escluso

Abbiamo appena visto che valgono

$$\tau_{0i} = -\varepsilon\beta_i + \mathcal{O}[1] \quad (i > 0), \quad (\text{III.16})$$

$$\tau_{ik} = \mathcal{O}[1] \quad (i \neq k, i > 0, k > 0), \quad (\text{III.16}')$$

$$\tau_{ii} = \frac{1}{2}\varepsilon + \mathcal{O}[1] \quad (i > 0). \quad (\text{III.17})$$

Le equazioni da integrare sono pertanto

$$\Delta_2^0 \gamma_{ik} = -\chi \frac{1}{2} \delta_i^k \varepsilon + \mathcal{O}[1], \quad (\text{III.24})$$

$$\Delta_2^0 \gamma_{0i} = -\chi \frac{\varepsilon}{2} (-2\beta_i) + \mathcal{O}[1]. \quad (\text{III.25})$$

Introduciamo adesso la funzione γ mediante l'equazione

$$\Delta_2^0 \gamma = -\frac{1}{2} \chi \varepsilon = -\frac{1}{2} \chi c^2 \mu, \quad (\text{III.26})$$

o, se si preferisce,

$$\Delta_2^0 \gamma = -4\pi f \frac{\mu}{c^2}, \quad (\text{III.26}')$$

Questa è ovviamente la famosa equazione di Poisson.

La presenza di c^2 al denominatore ci ricorda che γ è il potenziale newtoniano adimensionale della distribuzione di massa in considerazione.

Deduciamo da questo

$$\gamma = \frac{f}{c^2} \int_S \frac{\mu dS}{r}. \quad (\text{III.27})$$

Il confronto dell'equazione di Poisson con le precedenti dimostra la possibilità di porre

$$\gamma_{ik} = \delta_{ik} \gamma + \mathcal{O}[2] \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (\text{III.28})$$

$$\gamma_{0i} = -2\gamma_i + \mathcal{O}\left[\frac{3}{2}\right] \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{III.29})$$

dove γ è il vettore potenziale adimensionale, le cui componenti sono

$$\gamma_i = \frac{f}{c^2} \int_S \frac{\mu \beta_i}{r} dS. \quad (\text{III.30})$$

In ogni caso, si può scrivere

$$\gamma_{ik} = \delta_{ik} \gamma + \mathcal{O}\left[\frac{3}{2}\right]. \quad (\text{III.31})$$

III.2.3 L'equazione che definisce γ_{00} fino alla seconda approssimazione

Abbiamo bisogno dell'espressione approssimata per gli elementi g_{ki} , dati da

$$g^{ik} = \delta_{ik} e_i + 2e_i e_k \gamma_{ik}, \quad (\text{III.32})$$

come si vede chiaramente considerando la relazione di reciprocità.

In aggiunta, notiamo che

$$g = -1 + 2 \sum_{i=0}^3 e_i \gamma_{ii} + \mathcal{O}[2] = -1 + 2(\gamma - 3\gamma) + \mathcal{O}[2].$$

Quindi

$$\sqrt{-g} = 1 + 2\gamma + \mathcal{O}[2] \quad (\text{III.33})$$

ed infine

$$\log \sqrt{-g} = 2\gamma + \mathcal{O}[2]. \quad (\text{III.34})$$

Da queste considerazioni la prima equazione di Einstein risulta

$$G_{00} - \frac{\partial Z_0}{\partial x^0} = -\chi \tau_{00} \quad (\text{III.35})$$

e procediamo al calcolo di G_{00} , che decomponiamo come segue:

$$G_{00} = G_{00}^{(1)} + G_{00}^{(2)}, \quad (\text{III.36})$$

dove

$$G_{00}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x^0} \sum_{h=0}^3 \Gamma_{0h}^h - \sum_{h=0}^3 \frac{\partial \Gamma_{00}^h}{\partial x^h} \quad (\text{III.37})$$

$$G_{00}^{(2)} = - \sum_{h,l=0}^3 (\Gamma_{00}^l \Gamma_{hl}^h - \Gamma_{0h}^l \Gamma_{0l}^h). \quad (\text{III.38})$$

Si ha inoltre

$$\frac{\partial Z_0}{\partial x^0} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^{0^2}} - \sum_{h,j=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^0} \left(g^{hj} \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^h} \right).$$

Ora

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \sum_{h=0}^3 \Gamma_{0h}^h = \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^{0^2}}$$

e, utilizzando le formule (III.11), (III.12) e (III.32)

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^h &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 g^{hj} \left(2 \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \right) = -2 \sum_{j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^0} + \sum_{j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^j} \\
 &= \sum_{j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^j} - 2 \sum_{j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^0}, \\
 \sum_{h=0}^3 \frac{\partial \Gamma_{00}^h}{\partial x^h} &= \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial^2 \gamma_{00}}{\partial x^h \partial x^j} - 2 \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial^2 \gamma_{0j}}{\partial x^0 \partial x^h} \\
 &\quad + 2 \sum_{j=0}^3 e_h e_j \frac{\partial \gamma_{hj}}{\partial x^h} \left(\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^j} - 2 \frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^0} \right) + \mathcal{O}[3].
 \end{aligned}$$

Si ha anche

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Z_0}{\partial x^0} - \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^{0^2}} + 2 \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial^2 \gamma_{0j}}{\partial x^0 \partial x^h} - \sum_{h,j=0}^3 \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^h} \\
 = \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^{0^2}} + 2 \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial^2 \gamma_{0j}}{\partial x^0 \partial x^h}.
 \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned}
 G_{00}^{(1)} - \frac{\partial Z_0}{\partial x^0} &= - \sum_{h,j=0}^3 g^{hj} \frac{\partial^2 \gamma_{00}}{\partial x^h \partial x^j} - 2 \sum_{j=0}^3 e_h e_j \frac{\partial \gamma_{hj}}{\partial x^h} \left(\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^j} - 2 \frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^0} \right) + \mathcal{O}[3] \\
 &= - \sum_{h,j=0}^3 (\delta_{hj} e_j + 2 e_h e_j \gamma_{hj}) \frac{\partial^2 (\gamma + Z)}{\partial x^h \partial x^j} \\
 &\quad - 2 \sum_{j=0}^3 e_h e_j \frac{\partial \gamma_{hj}}{\partial x^h} \left(\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^j} - 2 \frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^0} \right),
 \end{aligned}$$

avendo posto

$$\gamma_{00} = \gamma + Z, \quad (\text{III.39})$$

dove Z è la parte del secondo ordine di γ_{00} . Continuando i calcoli, troviamo

$$\begin{aligned}
 G_{00}^{(1)} - \frac{\partial Z_0}{\partial x^0} &= -\square^0 \gamma - \square^0 Z - 2 \sum_{h,j=0}^3 e_h e_j \gamma_{hj} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^h \partial x^j} \\
 &\quad - 2 \sum_{j=0}^3 e_h e_j \frac{\partial \gamma_{hj}}{\partial x^h} \left(\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^j} - 2 \frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^0} \right) + \mathcal{O}[3] \\
 &= -\square^0 \gamma - \square^0 Z - 2 \sum_{j=0}^3 \gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^{j^2}} \\
 &\quad - 2 \sum_{j=0}^3 e_h e_j \delta_{hj} \frac{\partial \gamma}{\partial x^h} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x^j} - 2 \delta_{0j} \frac{\partial \gamma}{\partial x^0} \right) + \mathcal{O}[3],
 \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\gamma_{hj} = \delta_{hj} \gamma + \mathcal{O}[2], \quad (\text{III.40})$$

in virtù delle considerazioni viste nella sezione precedente.

Il risultato finale è

$$\begin{aligned}
 G_{00}^{(1)} - \frac{\partial Z_0}{\partial x^0} &= -\square^0 \gamma - \square^0 Z - 2\gamma \Delta_2^0 \gamma - 2\Delta_1^0 \gamma + \mathcal{O}[3] \quad (\text{III.41}) \\
 &= -\square^0 \gamma - \square^0 Z - \Delta_2^0 \gamma^2 + \mathcal{O}[3],
 \end{aligned}$$

dove

$$\Delta_1^0 \gamma = \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \right)^2 \quad (\text{III.42})$$

è il parametro differenziale del primo ordine, detto operatore di Beltrami.

Dobbiamo ancora calcolare $G_{00}^{(2)}$.

Si ha

$$G_{00}^{(2)} = \sum_{h,j=0}^3 (\Gamma_{0h}^j \Gamma_{0j}^h - \Gamma_{00}^j \Gamma_{hj}^h),$$

$$\Gamma_{0h}^j = \sum_{l=0}^3 \delta_{lj} e_j \begin{bmatrix} 0 & h \\ & l \end{bmatrix} + \dots + \mathcal{O}[2] = e_j \left(\frac{\partial \gamma_{0h}}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^h} \right) + \mathcal{O}[2],$$

$$\Gamma_{0j}^h = \sum_{l=0}^3 \delta_{lh} e_h \left(\frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^l} - \frac{\partial \gamma_{0l}}{\partial x^j} \right) + \mathcal{O}[2] = e_h \left(\frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^h} - \frac{\partial \gamma_{0h}}{\partial x^j} \right) + \mathcal{O}[2],$$

$$\begin{aligned}
\sum_{h,j=0}^3 \Gamma_{0h}^j \Gamma_{0j}^h &= \sum_{h,j=0}^3 e_h e_j \left(\frac{\partial \gamma_{0h}}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^h} \right) \left(\frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^h} - \frac{\partial \gamma_{0h}}{\partial x^j} \right) + \mathcal{O}[3] \\
&= - \sum_{h,j=0}^3 e_h e_j \left(\frac{\partial \gamma_{0h}}{\partial x^j} \right)^2 - \sum_{h,j=0}^3 e_h e_j \left(\frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^h} \right)^2 + \mathcal{O}[3] \\
&= 2 \sum_{j=1}^3 e_j \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x^j} \right)^2 + \mathcal{O}[3] = 2 \Delta_1^0 \gamma + \mathcal{O}[3], \\
\sum_{h,j=0}^3 \Gamma_{00}^j \Gamma_{hj}^h &= \sum_{j=0}^3 \Gamma_{00}^j \sum_{h=0}^3 \Gamma_{hj}^h = \sum_{j=0}^3 \Gamma_{00}^j \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^j} = 2 \sum_{j=0}^3 \Gamma_{00}^j \frac{\partial \gamma}{\partial x^j} + \mathcal{O}[3].
\end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^j &= \sum_{l=0}^3 \delta_{lj} e_j \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^l} \right) + \mathcal{O}[3] = \\
&= \sum_{l=0}^3 \delta_{lj} e_j \left(\frac{\partial g_{0l}}{\partial x^0} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^l} \right) + \mathcal{O}[3] = \\
&= e_j \left(\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \right) + \mathcal{O}[3] = -2e_j \delta_{0j} \frac{\partial \gamma}{\partial x^0} + e_j \frac{\partial \gamma}{\partial x^j} + \mathcal{O}[3].
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\sum_{h,j=0}^3 \Gamma_{00}^j \Gamma_{hj}^h &= -4 \sum_{j=0}^3 e_j \delta_{0j} \frac{\partial \gamma}{\partial x^0} \frac{\partial \gamma}{\partial x^j} + 2 \sum_{j=0}^3 e_j \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x^j} \right)^2 + \mathcal{O}[3] = \\
&= -2 \Delta_1^0 \gamma + \mathcal{O}[3].
\end{aligned}$$

Si ha infine

$$G_{00}^{(2)} = 4 \Delta_1^0 \gamma + \mathcal{O}[3]. \quad (\text{III.43})$$

La prima equazione di Einstein, trascurando i termini del terzo ordine, è

$$-\square^0 \gamma - \square^0 Z - \Delta_2^0 \gamma^2 + 4 \Delta_1^0 \gamma = -\chi \tau_{00}, \quad (\text{III.44})$$

e, per il nostro scopo, dovrà essere ulteriormente elaborata.

III.2.4 Trasformazione dell'equazione (III.44) mediante il principio di conservazione della massa interpretato nello spazio ordinario

A questo fine, è essenziale richiamare la nostra premessa (cf. Capitolo III, Sezione 1.2) secondo la quale lo spazio-tempo in cui i fenomeni gravitazionali

hanno luogo deve essere considerato molto simile ad una varietà euclidea, con le variabili x^0, x^1, x^2, x^3 , che differiscono molto poco, rispettivamente, dal tempo ordinario astronomico moltiplicato per c e dalle coordinate spaziali cartesiane. Sotto queste condizioni le relazioni tra le coordinate x^1, x^2, x^3 di un dato punto, ed eventualmente, il tempo x^0 , che seguono dalle equazioni di Einstein possono essere intuitivamente interpretate abbastanza semplicemente come se fossero coordinate cartesiane nello spazio ordinario ed x_0 il tempo römeriano. Le piccole differenze introdotte in questo modo dallo schema relativistico, o meglio, formalmente, dai termini del secondo ordine nelle nostre equazioni, costituiscono precisamente il banco di prova su cui verificare, attraverso osservazioni astronomiche, alcune conseguenze della nuova Meccanica Einsteiniana. Ora ricordiamo che $\varepsilon \sqrt{-g} dx^0 dS$ rappresenta una quantità elementare di energia che si muove lungo la sua linea oraria (cf. Capitolo I, Sezione 2.9). Questa linea oraria ha un'immagine ben determinata nello spazio astratto x^0, x^1, x^2, x^3 o anche nello spazio, dove x^0 è interpretata come tempo e x^1, x^2, x^3 come coordinate cartesiane. Sulla linea oraria concepita in tal modo avviene un'espansione di una quantità d'energia rappresentata da $\varepsilon \sqrt{-g} dx^0 dS$. Rimuovendo l'elemento della quarta dimensione x^0 , o più precisamente, dividendo per l'elemento proprio di tempo ds (che in condizioni ordinarie è molto vicino a dx^0) si ottiene l'energia

$$\varepsilon \sqrt{-g} \frac{dx^0}{ds} dS$$

corrispondente al volume euclideo dS . Il rapporto di questa quantità su dS , cioè

$$\eta = \varepsilon \sqrt{-g} \frac{dx^0}{ds}, \quad (\text{I.22})$$

rappresenta quindi la densità (tridimensionale) della distribuzione di energia che è legata a un istante qualsiasi x^0 , nello spazio euclideo S , dove abbiamo le nostre intuizioni ed eseguiamo le nostre misure.

Abbiamo appena affermato che $\frac{dx^0}{ds}$ è molto vicino all'unità. Lo stesso vale per $\sqrt{-g}$, di conseguenza la densità di energia η (nello spazio ordinario nel quale, per così dire, stiamo proiettando la nostra teoria) non è molto diversa dalla quantità ε . La densità della massa che occupa lo stesso spazio ad un dato istante è dunque

$$\mu = \frac{\eta}{c^2}, \quad (\text{III.45})$$

secondo la concezione fondamentale di Einstein sulla proporzionalità tra massa ed energia.

Ricordando che in termini più precisi

$$\frac{ds}{dx^0} = 1 - \gamma - \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}[2], \quad (\text{III.14})$$

$$\sqrt{-g} = 1 + 2\gamma + \mathcal{O}[2], \quad (\text{III.33})$$

si ha, fino al secondo ordine,

$$\varepsilon = (1 - 2\gamma) \left(1 - \gamma - \frac{1}{2}\beta^2 \right) \eta = \left(1 - 3\gamma - \frac{1}{2}\beta^2 \right) \eta, \quad (\text{III.46})$$

da cui concludiamo che, in ogni termine o combinazione di ordine 2 (o che alla fine diventa di tale ordine) possiamo tranquillamente sostituire ε con η , dal momento che la loro differenza è del primo ordine.

Ciò ci permette di scrivere

$$-\frac{1}{2}\chi\eta \quad (\text{III.47})$$

e

$$\frac{1}{2}\varepsilon + \eta(\beta^2 - \gamma) \quad (\text{III.48})$$

rispettivamente, al posto di

$$-\frac{1}{2}\chi\varepsilon = \Delta_2^0\gamma \quad (\text{III.47}')$$

e di

$$\tau_{00} \quad (\text{III.48}')$$

nell'equazione di Einstein, che è oggetto della nostra analisi.

Notando che, in questa equazione, si può sostituire $-\Delta_2^0 Z$ a $\square^0 Z$ perchè Z è una quantità del secondo ordine, potremo scrivere l'equazione di Einstein in questione nella forma seguente:

$$\Delta_2^0(Z - \gamma^2) = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^{0^2}} + \frac{1}{2}\chi(\eta - \varepsilon) - \chi\eta(\beta^2 - \gamma) - 4\Delta_1^0\gamma.$$

Ma, usando la relazione (III.46), si ha

$$\eta - \varepsilon = \eta \left(3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2 \right),$$

così, il secondo membro è

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^{0^2}} + \frac{1}{2}\chi\eta \left(3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2 \right) + \chi\eta\gamma - \chi\eta\beta^2 - 4\Delta_1^0\gamma$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^{0^2}} + \frac{1}{2} \chi \eta \gamma + \frac{1}{2} \chi \eta 4\gamma - 4 \Delta_1^0 \gamma - \frac{1}{2} \chi \eta \frac{3}{2} \beta^2 \\
&= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^{0^2}} + \frac{1}{2} \chi \eta \gamma - 4(\Delta_1^0 \gamma + \gamma \Delta_2^0 \gamma) - \frac{1}{2} \chi \eta \frac{3}{2} \beta^2
\end{aligned}$$

o infine, se notiamo che⁸

$$\Delta_2^0 \gamma^2 = 2(\Delta_1^0 \gamma + \gamma \Delta_2^0 \gamma),$$

il secondo membro in questione si riduce a

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^{0^2}} + \frac{1}{2} \chi \eta \gamma - 2 \Delta_2^0 \gamma - \frac{1}{2} \chi \eta \frac{3}{2} \beta^2$$

e l'equazione corrispondente, a

$$\Delta_2^0(Z + \gamma^2) = \frac{1}{2} \chi \eta \gamma - \frac{1}{2} \chi \eta \frac{3}{2} \beta^2 + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^{0^2}}. \quad (\text{III.49})$$

III.2.5 L'integrazione dell'equazione (III.49)

Poniamo, inoltre,

$$Z = -\gamma^2 + \zeta \quad (\text{III.50})$$

e

$$\zeta = \varphi + \psi + v, \quad (\text{III.51})$$

con le funzioni φ, ψ, v che soddisfano le equazioni

$$\Delta_2^0 \varphi = \frac{1}{2} \chi \eta \gamma, \quad (\text{III.52})$$

$$\Delta_2^0 \psi = -\frac{1}{2} \chi \eta \frac{3}{2} \beta^2, \quad (\text{III.53})$$

$$\Delta_2^0 v = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^{0^2}}, \quad (\text{III.54})$$

la cui integrazione, nelle condizioni che ci interessano, è immediata.

Il secondo membro della prima è

$$\frac{4\pi f}{c^4} \eta \gamma = -4\pi \frac{f}{c^2} \frac{\eta}{c^2} \gamma = -4\pi \frac{f}{c^2} \mu \gamma,$$

⁸Ricordando le definizioni di $\Delta_1^0 \gamma = \sum_{\mu=1}^3 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x^\mu} \right)^2$, $\Delta_2^0 \gamma = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^{\mu^2}}$ e $\Delta_2^0 \gamma^2 = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial^2 \gamma^2}{\partial x^{\mu^2}}$, con un semplice calcolo si ha $\Delta_2^0 \gamma^2 = \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial x^\mu} \right) = \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(2\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x^\mu} \right) = \sum_{\mu} 2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x^\mu} \right)^2 + \sum_{\mu} 2\gamma \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^{\mu^2}} \right)$. -ndt

secondo la (III.45), così è sufficiente ricordare l'equazione di Poisson per attribuire a φ l'espressione

$$\varphi = -\frac{f}{c^2} \int_S \frac{\mu \gamma}{r} dS \quad (\text{III.55})$$

dove l'integrazione può essere estesa all'intero spazio S .

In maniera analoga si trova che

$$\psi = \frac{3}{2} \frac{f}{c^2} \int_S \frac{\mu \beta^2}{r} dS. \quad (\text{III.56})$$

Infine, per integrare la terza equazione, ricordiamo che

$$\Delta_2^0 r = \frac{2}{r}.$$

Dunque abbiamo

$$\Delta_2^0 v = \frac{f}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} \int_S \frac{\mu dS}{r} = \frac{1}{2} \frac{f}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} \int_S \mu \Delta_2^0 r dS. \quad (\text{III.57})$$

Essendo gli operatori $\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}}$, Δ_2^0 permutabili, segue che

$$\Delta_2^0 \left(v - \frac{1}{2} \frac{f}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} \int_S \mu r dS \right) = 0, \quad (\text{III.58})$$

che è sufficiente per affermare che la quantità sotto il segno di Δ_2^0 deve essere identicamente nulla, perché è ovunque regolare e nulla all'infinito.

Quindi

$$v = \frac{1}{2} \frac{f}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} \int_S \mu r dS. \quad (\text{III.59})$$

III.2.6 Riassunto dei calcoli precedenti

Ora possiamo mettere assieme i risultati dell'integrazione approssimata delle equazioni di Einstein, cioè l'espressione analitica dei dieci potenziali gravitazionali.

Si ha

$$\begin{cases} g_{ik} = 0 & (i \neq k, i, k = 1, 2, 3), \\ g_{ii} = -(1 + 2\gamma) & (i > 0), \\ g_{0i} = 4\gamma_i + \bigcirc[2] & (i > 0), \\ g_{00} = 1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\zeta; \end{cases} \quad (\text{III.60})$$

$$\zeta = \varphi + \psi + v, \quad (\text{III.51})$$

dove

$$\gamma = \frac{f}{c^2} \int_S \frac{\mu dS}{r}, \quad (\text{III.27})$$

$$\gamma_i = \frac{f}{c^2} \int_S \frac{\mu \beta_i}{r} dS \quad (i = 1, 2, 3); \quad (\text{III.30})$$

$$\varphi = -\frac{f}{c^2} \int_S \frac{\mu \gamma}{r} dS, \quad (\text{III.55})$$

$$\psi = \frac{3}{2} \frac{f}{c^2} \int_S \frac{\mu \beta^2}{r} dS, \quad (\text{III.56})$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{f}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} \int_S \mu r dS. \quad (\text{III.59})$$

Siccome le coordinate x^i d'ora in poi devono essere considerate cartesiane e rettangolari, si ha

$$\beta_i = \frac{dx^i}{dx^0} \quad \text{e} \quad \beta^2 = \sum_{i=0}^3 \beta_i^2,$$

mentre il ds^2 originale si scriverà

$$ds^2 = (1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\zeta) dx^{0^2} - (1 + 2\gamma) dl_0^2 + 8dx^0 \sum_{i=0}^3 \gamma_i dx^i, \quad (\text{III.61})$$

dove

$$dl_0^2 = \sum_{i=0}^3 dx^{i^2}. \quad (\text{III.62})$$

Questa forma esplicita di ds^2 giocherà un ruolo fondamentale nella formazione delle equazioni differenziali del moto.

Da questo possiamo dedurre l'espressione di $\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2$, cioè

$$\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 = 1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\zeta - (1 + 2\gamma)\beta^2 + 8 \sum_{i=0}^3 \gamma_i \beta_i. \quad (\text{III.63})$$

Capitolo IV

Sforzi interni e possibile trascurabilità nella presente approssimazione

IV.1 Il tensore dell'energia. La pressione e la sua invarianza lungo le linee orarie nel caso dei corpi celesti

IV.1.1 Considerazioni generali

Nel Capitolo II abbiamo rivolto l'attenzione al concetto e, conseguentemente, al teorema di esistenza dei mezzi granulari (pulviscolo cosmico) per cui possiamo porre

$$T_{ik} = \varepsilon \lambda_i \lambda_k, \quad (\text{I.29})$$

o, se preferiamo,

$$T^{ik} = \varepsilon \lambda^i \lambda^k. \quad (\text{I.29}')$$

Fin dall'inizio Einstein, in una conversazione personale, manifestò l'obiezione che i corpi celesti non sono per niente uguali alla polvere cosmica, ed espresse il dubbio che non fosse possibile stabilire una teoria che includesse, tra i casi più importanti, gli elementi essenziali di ciò che accade nella realtà.

Dato che per assicurare le caratteristiche individuali e la consistenza dei corpi celesti intervengono essenzialmente gli sforzi interne, si deve, in prima approssimazione, sostituire le ipotesi sopra enunciate, che non tengono in considera-

zione tali forze, con uno schema in cui si introducono gli sforzi interni con la forma particolarmente semplice di una pressione isotropa.

Il tensore dell'energia, in tal caso, prende la forma adottata da Synge, cioè

$$T_{ik} = (\varepsilon + p)\lambda_i\lambda_k - pg_{ik}, \quad (IV.1)$$

che banalmente si riduce alla (I.29) se $p = 0$.

IV.1.2 Ipotesi relativistiche sulla pressione

Come postulato fondamentale relativo alla pressione p , adatteremo l'assunzione che la pressione p esercitata da una particella in moto sia conservata durante il moto stesso, cioè lungo tutta la sua linea oraria.

L'espressione matematica di questa ipotesi è

$$\frac{dp}{ds} = 0, \quad (IV.2)$$

la cui invarianza relativistica è ovvia.

Dal punto di vista fisico, questa ipotesi è sicuramente soddisfatta per i corpi celesti che si comportano, sostanzialmente, come solidi.

IV.2 Ritorno alle equazioni del moto

IV.2.1 Contributo di p sulle componenti τ_{ik} . Velocità del suono nei mezzi continui gravitanti

Secondo l'espressione

$$T_{ik} = (\varepsilon + p)\lambda_i\lambda_k - pg_{ik}, \quad (IV.1)$$

il termine in p nell'invariante

$$T = \sum g^{ik}T_{ik} \quad (II.3)$$

è

$$T^* = p \sum g^{ik}(\lambda_i\lambda_k - g_{ik}) = -3p. \quad (IV.3)$$

Similmente, il termine in p in

$$\tau_{ik} = T_{ik} - Tg_{ik} \quad (II.2)$$

è

$$\tau_{ik}^* = p(\lambda_i\lambda_k - g_{ik}) - T^*g_{ik} = p(\lambda_i\lambda_k + 2g_{ik}). \quad (IV.4)$$

È inutile tener conto di questi termini addizionali nell'equazione differenziale

$$\Delta_2^0 \gamma_{ik} = -\chi \tau_{ik}, \quad (\text{III.23})$$

nel caso in cui gli indici non sono simultaneamente nulli, poiché in quel caso si possono trascurare i termini di ordine superiore al primo che sono moltiplicati per ε .

Ciò risulta immediatamente dal fatto che

$$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{c^2} \frac{p}{\mu} \quad (\text{IV.5})$$

può essere pensata come quantità del primo ordine.

Infatti, se assumiamo che dentro il mezzo in considerazione le leggi della Fisica ordinaria siano perlomeno approssimativamente applicabili, il rapporto $\frac{p}{\mu}$ della pressione sulla densità può essere interpretato (in condizioni isoterme) come il quadrato della velocità del suono, che non è molto più grande, e a volte anche minore, del quadrato della velocità dei corpi celesti. Si ha dunque a che fare con termini dell'ordine di β^2 .

IV.2.2 Modifica di ε derivante dalla pressione

È invece di fondamentale importanza tener conto di quei termini individuati in precedenza nell'equazione

$$\Delta_2^0 \gamma_{00} = -\chi \tau_{00}, \quad (\text{III.23})$$

perché vogliamo calcolare γ_{00} fino al secondo ordine incluso.

Da quanto visto, il termine addizionale in τ_{00} è

$$\tau_{00}^* = p(\lambda_0^2 + 2g_{00}), \quad (\text{IV.4})$$

cosicché il termine aggiuntivo nel secondo membro dell'equazione (III.23) può essere scritto

$$\begin{aligned} -\chi p(\lambda_0^2 + 2g_{00}) &= -\chi p(3 + \bigcirc[2]) = -\chi \varepsilon \frac{p}{\varepsilon} (3 + \bigcirc[2]) = \\ &= -3\chi \varepsilon \frac{p}{\varepsilon} (1 + \bigcirc[2]), \end{aligned}$$

avendo potuto sostituire sia λ_0^2 sia g_{00} con l'unità.

L'operatore B applicato al prodotto

$$-3\chi \varepsilon \frac{p}{\varepsilon} \bigcirc[2]$$

ci darebbe, in accordo col Capitolo III, Sezione 1, un contributo del quarto ordine e pertanto trascurabile, mentre $-3\chi p$, nell'espressione di γ_{00} , porta a un potenziale avente per densità adimensionale $-3\chi p$ ad un fattore vicino a

$$\frac{2f}{c^2}.$$

Unendo questo termine complementare con il potenziale del primo ordine γ proveniente dalla densità ε , si ottiene un singolo potenziale per ognuno dei corpi aventi la densità

$$\varepsilon' = \varepsilon \left(1 - \frac{3p}{\varepsilon} \right)$$

fino allo stesso fattore.

Assumendo che i nostri corpi posseggano, rispetto alla pressione p , la simmetria già supposta per la distribuzione di materia ε , nei nostri calcoli possiamo sostituire ε con ε' .

Quanto ai termini del secondo ordine in cui compare ancora ε , possiamo evidentemente immaginare di scrivere, senza modifiche significative, ε' al posto di ε , quindi rimuovere l'accento ovunque.

Da questo deduciamo che le equazioni di Poisson che definiscono i dieci potenziali γ_{ik} ($i, k = 0, 1, 2, 3$) sono esattamente le stesse che avevamo in assenza della pressione, tranne per il significato meno evidente della quantità ε .

IV.2.3 Equazioni del moto che sostituiscono il principio geodetico e loro interpretazione classica

Esaminiamo come la presenza della pressione modifica le quattro equazioni di conservazione, ovvero, sostanzialmente, le equazioni del moto.

Tenendo conto di p , le equazioni (I.32') diventano¹

$$(\varepsilon + p)k_i - \lambda_i \left[\frac{d(\varepsilon + p)}{ds} + (\varepsilon + p)\text{div } \lambda \right] - p_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3). \quad (\text{IV.6})$$

Poiché il vettore di curvatura k è ortogonale alle linee orarie, cioè

$$\sum_{i=0}^3 k_i \lambda^i = 0,$$

¹Si noti che qui di seguito, e così in (IV.6'), p_i denota $\frac{\partial p}{\partial x^i}$ e dato che in precedenti formule l'A. indicava la 4-accelerazione, o vettore curvatura, proprio con p_i , ora, qui, per evitare confusioni, l'A. indica la 4-accelerazione con k_i .

moltiplicando le equazioni precedenti per $-\lambda_i$ e sommando, otteniamo

$$\frac{d(\varepsilon + p)}{ds} + (\varepsilon + p)\operatorname{div} \lambda + \sum_{i=0}^3 p_i \lambda^i = 0.$$

L'ultimo termine si annulla a causa dell'ipotesi riguardante la pressione, e rimane

$$\frac{d\varepsilon}{ds} + (\varepsilon + p)\operatorname{div} \lambda = 0. \quad (\text{IV.7})$$

Con questo risultato, le equazioni di conservazione (I.32') si riducono a

$$(\varepsilon + p)k_i - p_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3). \quad (\text{IV.6'})$$

Chiaramente, possiamo collegare queste equazioni semplicemente allo spazio x_1, x_2, x_3 poiché la quarta equazione, $i = 0$, si riduce a un'identità, grazie alle suddette ipotesi e alla proprietà della curvatura

$$\sum_{i=0}^3 k_i \lambda^i = 0,$$

appena ricordata.

IV.3 Conseguenze generali per ogni corpo

IV.3.1 Equazioni del moto per i centri di gravitazione

Nella sezione precedente abbiamo stabilito le equazioni del moto (IV.6') per ogni elemento materiale nel mezzo in considerazione. Vediamo che l'influenza locale della pressione non è in generale trascurabile, poiché è espressa analiticamente dal fatto che, invece di

$$k_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

(moto geodetico) abbiamo, mediante la (IV.6'),

$$k_i = \frac{p_i}{\varepsilon + p}$$

che sono le componenti controvarianti del vettore $-\frac{1}{\varepsilon + p} \operatorname{grad} p$.

IV.3.2 Distribuzione simmetrica della pressione

Nonostante, come abbiamo appena detto, l'influenza locale non si annulla, è possibile concludere, come risultato delle nostre ipotesi, che la prima approssimazione resta invariata.

Infatti, se consideriamo precisamente il centro di gravità di ciascuno dei nostri corpi, a patto che la richiesta di simmetria sia ancora soddisfatta, il gradiente della pressione si annulla per il centro di gravità.

Il suo moto è quindi ancora soggetto alle equazioni

$$k_i = 0,$$

che esprimono il principio geodetico.

IV.3.3 Legittimità a limitarsi ai mezzi granulari

È dunque legittimo limitare la nostra analisi di prima approssimazione, come anticipato già molte volte, ai mezzi granulari.

Capitolo V

Riduzione a equazioni differenziali ordinarie

V.1 La funzione di Lagrange

V.1.1 Revisione del principio geodetico

Il moto di ogni elemento materiale è caratterizzato nello spazio-tempo da una linea geodetica esattamente del ds^2 che stiamo cercando.

Questo è il ben noto principio geodetico, formulato da Einstein, come già visto nel Capitolo I, ancora prima si conoscessero le connessioni dei potenziali gravitazionali con la materia e il suo moto.

Dal punto di vista analitico, il principio ci dice che i moti propri (lungo i quali $ds^2 > 0$) sono definiti dal principio variazionale

$$\delta \int ds = 0. \tag{I.4}$$

L'annullamento della variazione è collegato, nell'immagine geometrica quadridimensionale, al passaggio della linea oraria rispetto ad ogni altra linea infinitesimamente vicina ed avente le stesse estremità.

Nella (I.4) dobbiamo, di conseguenza, attribuire incrementi infinitesimi arbitrari alle quattro coordinate x^0, x^1, x^2, x^3 , con la condizione aggiuntiva che questi incrementi svaniscono alle estremità. Ma si può mostrare¹ che non è necessario

¹Cf. Levi-Civita, *Absolute Differential Calculus*, pagg. 289-290.

compiere la variazione in x^0 , perchè il primo membro della (I.4) è soggetto a una variazione che si annulla come conseguenza delle condizioni che vengono dalle variazioni delle tre coordinate spaziali² x^1, x^2, x^3 .

Essendo questo il caso, attribuiamo una forma equivalente alla (I.4), che meglio si adatta a possibili comparazioni con la Meccanica più antica.

Si ha³

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dx^0} \right)^2 &= 1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\zeta - (1 + 2\gamma)\beta^2 + 8 \sum_{i=1}^3 \gamma_i \beta_i \\ &= 1 - 2\Re + 2\gamma^2 - 2\zeta - 2\gamma\beta^2 + 8 \sum_{i=1}^3 \gamma_i \beta_i \end{aligned}$$

dove la funzione

$$\Re = \frac{1}{2}\beta^2 + \gamma \quad (\text{V.1})$$

è ovviamente la funzione lagrangiana⁴ che si otterrebbe, con altri mezzi in ugual modo, in Meccanica newtoniana, che definisce il moto di un generico elemento di materia privo di dimensioni.

Estraendo la radice quadrata, si ottiene

$$\frac{ds}{dx^0} = 1 - \Re + \gamma^2 - \zeta - \gamma\beta^2 + 4 \sum_{i=1}^3 \gamma_i \beta_i - \frac{1}{2}\Re^2, \quad (\text{V.2})$$

non considerando i termini di ordine superiori al secondo.

V.1.2 Costruzione della funzione lagrangiana

Ora l'equazione variazionale (I.4) può essere scritta nella forma

$$\delta \int \left(1 - \frac{ds}{dx^0} \right) dx^0 = 0, \quad (\text{V.3})$$

essendo vera

$$\delta \int dx^0 = 0,$$

²In sostanza, anche in virtù di $\frac{ds}{dx^0} > 0$, si ritiene x^0 la variabile indipendente. -ndt

³Si veda la (III.63). -ndt

⁴Infatti, essa è interpretabile come l'energia cinetica classica sommata al potenziale gravitazionale newtoniano. -ndt

grazie alla nostra osservazione riguardo la possibilità di non assoggettare la variabile x^0 a variazione.

Si può dunque considerare come funzione lagrangiana

$$\mathfrak{L} = 1 - \frac{ds}{dx^0}$$

e si ottiene esplicitamente

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{R} + \mathfrak{D}, \quad (\text{V.4})$$

con

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2}\mathfrak{R}^2 - \gamma^2 + \zeta + \gamma\beta^2 - 4 \sum_{i=0}^3 \gamma_i \beta_i. \quad (\text{V.5})$$

È proprio la funzione $\mathfrak{D}$ che caratterizza la piccola modifica einsteiniana del moto di ogni elemento materiale e che intendiamo ora studiare più a fondo.

V.2 Le immediate vicinanze di un punto in moto

V.2.1 Notazioni

Dal momento che è nostra intenzione rendere chiare le varie differenze tra gli approcci classici e relativistici al problema, facciamo qui qualche osservazione preliminare sulle circostanze (ben note separatamente ma qui trattate assieme) che permetteranno di ridurre il problema del moto gravitazionale di molti corpi dotati di massa al problema di un egual numero di punti materiali.

Nell'espressione della funzione lagrangiana $\mathfrak{L}$, che abbiamo appena trovato, sono presenti, essenzialmente, alcuni potenziali estesi al dominio S (dello spazio euclideo x^1, x^2, x^3) occupato da questi corpi che si attraggono ad un certo istante.

Supponiamo in particolare che il punto P in questione appartenga ad un corpo C (e indicheremo con la stessa lettera il campo che esso occupa).

Possiamo immaginare di decomporre i potenziali a cui ci riferiamo in due parti, una che è estesa a C , l'altra alla porzione residua S' di S .

Il potenziale γ è l'unico termine del primo ordine e di conseguenza il più importante.

Comunque sia, indicheremo con la notazione $\gamma', \varphi', \dots$ la parte dei potenziali estesi a S' , e con la notazione $\gamma'', \varphi'', \dots$ quella che concerne il campo C .

Così, tenendo ciò a mente, abbiamo

$$\gamma = \gamma' + \gamma'', \quad \varphi = \varphi' + \varphi'', \quad \dots \quad (\text{V.6})$$

Più in generale, una funzione degli stessi potenziali, come $\mathfrak{R}, \mathfrak{D}, \mathfrak{L}$, può essere decomposta allo stesso modo

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' + \mathfrak{R}'', \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'', \quad \dots, \quad (\text{V.6}')$$

dove $\mathfrak{R}', \mathfrak{D}', \dots$ è la parte che si avrebbe se il corpo C fosse eliminato, mentre $\mathfrak{R}'', \mathfrak{D}'', \dots$ caratterizza l'influenza del corpo C sul moto di P.

V.2.2 Forze interne e principio di eliminazione in Meccanica Classica. Un'osservazione riguardo i valori numerici

Brillouin ha appropriatamente chiamato *principio di eliminazione* la possibilità di arrivare, sotto condizioni particolari, alla conclusione che il termine $\mathfrak{L}''$ non eserciti nessuna influenza sul moto di P.

Notiamo qui che nella Meccanica Classica le condizioni indicate prima seguono sostanzialmente dal principio di azione e reazione.

Ma esaminiamo la materia nello schema relativistico sopra esposto.

In maniera specifica, si ha

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' + \gamma'', \quad (\text{V.7})$$

dove

$$\mathfrak{R}' = \frac{1}{2}\beta^2 + \gamma', \quad (\text{V.8})$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2}(\mathfrak{R}' + \gamma'')^2 - (\gamma' + \gamma'')^2 + \zeta' + \zeta'' + (\gamma' + \gamma'')\beta^2 \quad (\text{V.9})$$

$$- 4 \sum_{i=1}^3 (\gamma'_i + \gamma''_i) \beta_i,$$

avendo posto

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'', \quad (\text{V.10})$$

$$\mathfrak{D}' = \frac{1}{2}\mathfrak{R}'^2 - \gamma'^2 + \zeta' + \gamma'\beta^2 - 4 \sum_{i=1}^3 \gamma'_i \beta_i, \quad (\text{V.11})$$

$$\mathfrak{D}'' = \mathfrak{R}'\gamma'' - \frac{1}{2}\gamma''^2 - 2\gamma'\gamma'' + \zeta'' + \gamma''\beta^2 - 4 \sum_{i=1}^3 \gamma''_i \beta_i \quad (\text{V.12})$$

$$= \mathfrak{R}'\gamma'' - \frac{1}{2}\gamma''^2 - 2\gamma'\gamma'' + \varphi'' + \psi'' + \nu'' + \gamma''\beta^2 - 4 \sum_{i=0}^3 \gamma''_i \beta_i.$$

Quindi

$$\mathfrak{L}'' = \gamma'' + \left(\frac{1}{2} \beta^2 + \gamma' \right) \gamma'' - \frac{1}{2} \gamma''^2 - 2\gamma' \gamma'' + \zeta'' + \gamma'' \beta^2 - 4 \sum_{i=1}^3 \gamma_i'' \beta_i \quad (\text{V.13})$$

In effetti, non è possibile supporre che $\mathfrak{L}''$ sia, né tantomeno diventi sotto opportune ipotesi, trascurabile rispetto a $\mathfrak{L}'$, e questo è immediatamente evidente quando teniamo in considerazione solo termini del primo ordine (entrambi positivi).

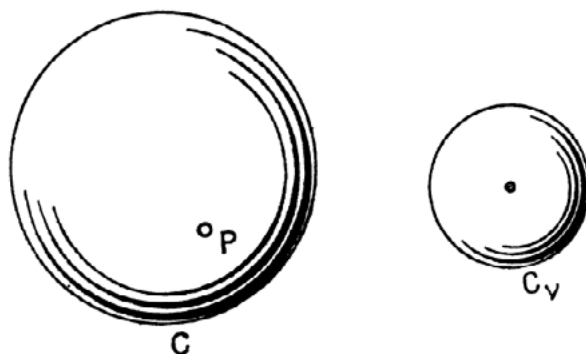


Fig. 1.

Infatti, il potenziale γ'' domina γ' . È sufficiente considerare il tipico caso di un sistema di corpi C_v che si attraggono, aventi masse e dimensioni comparabili.

Il contributo γ'' del corpo C contenente P al suo interno è sicuramente maggiore di tutti gli altri corpi C_v , perché le distanze dei punti di C sono minori rispetto alle analoghe distanze dei punti di ogni corpo C_v .

Per fissare bene le idee, consideriamo il caso elementare di alcune sfere omogenee.

Siano R ed m il raggio e la massa di C , rispettivamente; R_v e m_v le analoghe quantità per C_v e supponiamo che P sia il centro di C .

Il contributo del corpo C_v su γ' è

$$\frac{f m_v}{c^2} \frac{1}{r_v}.$$

Il valore in P (centro di C) del potenziale di questa sfera è $\frac{3}{2} \frac{f m_v}{c^2} \frac{1}{R}$, come ben noto.

L'ordine di grandezza di γ' rispetto a γ_v è quindi

$$\frac{\gamma'}{\gamma_v} \sim \frac{r_v}{R},$$

ovvero, nel caso dei corpi celesti, l'ordine del rapporto di una delle mutue distanze sul raggio di un corpo (sfera attraente), che non è per niente trascurabile. Tuttavia si deve osservare che questa difficoltà preliminare si presenta anche nella Meccanica ordinaria dove $\mathfrak{L}'$ si riduce a $\mathfrak{R}'$ e $\mathfrak{L}''$ a γ'' .

Infatti, in quel caso le equazioni di Lagrange del moto di P sono

$$\frac{d}{dx^0} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \beta_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{V.14})$$

cioè

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial \gamma'}{\partial x^i} + \frac{\partial \gamma''}{\partial x^i} \quad \left(\dot{} = \frac{d}{dx^0} \right), \quad (\text{V.14}')$$

dove le derivate che entrano nel secondo membro ovviamente rappresentano, a meno del fattore $\frac{1}{c^2}$, le forze newtoniane, rispettivamente, esterne e interne al corpo C.

Le considerazioni precedenti mostrano che le forze interne derivanti da γ'' sono, considerate individualmente, in generale, più forti delle forze esterne dovute al potenziale γ' .

Comunque, bisogna ricordarsi che esiste una combinazione classica di queste equazioni: l'equazione che governa il moto del centro di gravità, in cui i contributi di γ'' (o meglio, delle sue derivate) si cancellano a vicenda a due a due. In ciò consiste, concettualmente, il principio di eliminazione nella Meccanica Classica.

In Meccanica Relativistica si deve considerare non solo γ'' , ma anche tutti i termini del secondo ordine, per raggiungere l'approssimazione immediatamente superiore a quella newtoniana.

Così dobbiamo sforzarci di eliminare, prima di tutto nelle equazioni del moto, tutti quei termini del primo ordine che provengano da γ'' e che scompaiono definitivamente dalle equazioni newtoniane del moto, un risultato ottenuto una volta ancora introducendo in maniera opportuna la considerazione del centro di gravità. Ma allo stesso tempo, conviene semplificare, quando possibile, la parte del secondo ordine $\mathfrak{L}''$.

V.2.3 Criteri numerici nell'esecuzione dei calcoli

Ora ci proponiamo di introdurre alcune ipotesi preliminari sui corpi e i loro moti grazie alle quali possiamo semplificare le equazioni con un'approssimazione che sia adeguata a comprendere le differenze fondamentali rispetto alla Meccanica Newtoniana ordinaria.

A tal fine, ci limitiamo a calcolare, nei termini del secondo ordine del tipo

$$\beta_\mu^2, \gamma_\nu \quad (\mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1),$$

ciascuno dei fattori con un'approssimazione piuttosto grossolana, dell'un per cento, per esempio.

Questo criterio ci porterà a conclusioni evidentemente meno precise rispetto a ciò che avremmo dedotto dalle equazioni di Lagrange indicate poco fa (dove i termini $\mathfrak{R}$ newtoniani sono del primo ordine e i termini contenuti in $\mathfrak{D}$ sono del secondo ordine) senza ulteriori modifiche.

Infatti, in quel caso, l'approssimazione su cui possiamo contare, ovvero, il rapporto tra i termini del secondo ordine e quelli del primo, è $10^{-12} : 10^{-6} = 10^{-6}$. Se, al contrario, ci curassimo di valutare qualche fattore del primo ordine presente in $\mathfrak{D}$ a meno di 10^{-n} (per semplificare abbiamo posto $n = 2$), potremmo contare su un'approssimazione non più di 10^{-6} , ma solamente di 10^{-n} ($n < 6$).

V.2.4 Considerazioni preliminari per la riduzione a un numero finito di punti materiali

Detto ciò, andiamo avanti a considerare la combinazione dei centri di gravità (essenziale per eliminare i contributi di γ'') e, allo stesso tempo, la struttura dei vari termini (del secondo ordine) da cui $\mathfrak{D}$ risulta.

A questo fine, dobbiamo considerare la totalità dei punti materiali P di cui il corpo C è costituito; per ognuno di questi, valgono le equazioni differenziali la cui funzione di Lagrange $\mathfrak{L}$ in prima approssimazione si riduce alla parte newtoniana

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2}\beta^2 + \gamma' + \gamma''. \quad (\text{V.7})$$

Il centro di gravità di tutti questi punti P si muove come se le forze interne non esistessero o, equivalentemente, ha come funzione di Lagrange

$$\mathfrak{R}' = \frac{1}{2}\beta^2 + \gamma',$$

perché la parte di γ'' si elimina lei stessa nelle equazioni differenziali.

È sulla base di questo risultato che conviene passare a un'approssimazione successiva per la funzione lagrangiana nel nostro problema.

Le equazioni differenziali che si sviluppano dal principio geodetico sono

$$\frac{d}{dx^0} \frac{\partial(\mathfrak{R} + \mathfrak{D})}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial(\mathfrak{R} + \mathfrak{D})}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{V.15})$$

o, se vogliamo,

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x^i} - \frac{d}{dx^0} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \dot{x}^i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\text{V.15}')$$

I termini $\frac{\partial \gamma}{\partial x^i}$ del secondo membro sono le forze newtoniane e i termini residui rappresentano le perturbazioni einsteiniane.

Le tre combinazioni lineari classiche che esprimono il principio del moto del centro di gravità G sono

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} + \frac{1}{m} \int_C \mu \left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x^i} - \frac{d}{dx^0} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \dot{x}^i} \right) dC, \quad (\text{V.16})$$

dove

$$m = \int_C \mu dC \quad (\text{V.17})$$

è la massa di C e i primi membri non sono altro che le componenti dell'accelerazione di G e i secondi membri sono le componenti, ridotte all'unità di massa, delle forze separate nella parte newtoniana (che è certamente del primo ordine) e nei binomi

$$\Pi_i = \frac{1}{m} \int_C \mu \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x^i} dC - \frac{1}{m} \int_C \frac{d}{dx^0} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \dot{x}^i} dC \quad (\text{V.18})$$

che caratterizzano esattamente la perturbazione prodotta sul moto del centro di gravità.

Vedremo che il calcolo di Π_i sarà molto complicato, sia a causa della struttura della funzione $\mathfrak{D}$, che dipende allo stesso tempo dalle velocità e dalle accelerazioni di tutte le masse del sistema S in questione, sia a causa dell'integrazione estesa al campo C , di cui G è il centro di gravità.

V.3 Qualche complemento di meccanica classica

V.3.1 Centri di gravitazione

Sviluppiamo ora qualche nozione complementare necessaria per la formulazione delle ipotesi fondamentali su cui poggia la nostra teoria.

Chiamiamo *centro di gravitazione* di un corpo C il (oppure anche ogni) punto dove la risultante delle attrazioni newtoniane degli elementi materiali del corpo si annulla.

È facile vedere che, per ogni corpo C , esiste almeno un centro di gravitazione. Infatti, il potenziale newtoniano U di ogni corpo C (limitato) è una funzione

limitata nello spazio (che si annulla all'infinito).

Di conseguenza esiste almeno un punto P_0 dello spazio dove il potenziale assume il suo massimo.

In questo punto P_0 , le derivate di U si annullano necessariamente; l'attrazione è dunque nulla in P_0 .

Se in più ricordiamo che U è una funzione armonica all'esterno del corpo C e che una tale funzione non ha un massimo o un minimo all'interno di un campo regolare, concludiamo che il punto P_0 non è all'esterno di C , e si può anche escludere che sia sul bordo di C , se il corpo è convesso.

È facile mostrare che, se il corpo C ha un centro di simmetria O , il punto O è un centro di gravitazione.

Si ha, infatti,

$$U(x, y, z) = U(-x, -y, -z), \quad (V.19)$$

se x, y, z sono le coordinate di un punto qualsiasi nello spazio relativo a un sistema di assi in cui O è l'origine.

Dall'identità appena scritta deduciamo (differenziando e poi ponendo $x = y = z = 0$) che le tre derivate $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ si annullano nel punto O .

Alla nozione di centro di gravitazione si collega quella di *corpo centrobatico*.

Fu Lord Kelvin⁵ che chiamò baricentrico il corpo C che esercita su ogni punto nello spazio un'attrazione diretta verso uno specifico punto O .

Quindi O risulta allo stesso tempo centro di gravitazione e centro di gravità di C .

In tal caso, l'ellissoide d'inerzia del corpo si riduce ad una sfera.

V.3.2 Condizione di sostanzialità del centro di gravità. Simmetrie

Dalla definizione, il centro di gravità⁶ G di un sistema S (continuo) che, all'istante t in cui occupa il campo C , è caratterizzato dall'equazione

$$G - O = \frac{1}{m} \int_C (P - O) dm \quad (m = \text{massa}), \quad (V.20)$$

dove il punto O è un punto arbitrario, che noi qui poniamo all'origine del sistema cartesiano $Oxyz$. Se $v(P|t)$ rappresenta la velocità all'istante t di un

⁵Lord Kelvin e Tait, *Treatise on natural Philosophy*, 2; vedi anche: Fenici, *Centri di gravitazione e corpi centrobatici*, *Rend. Lincei*, 1935, 493-498.

⁶Levi-Civita, *Movimenti di un sistema continuo che rispettano l'invariabilità sostanziale del baricentro*, *Acc. Pont. Nuovi Lincei*, 88 (1935) 151-155.

punto P di S, si ha, differenziando la formula precedente rispetto a t

$$\dot{G} = \frac{1}{m} \int_C v(P|t) dm. \quad (V.21)$$

D'altra parte, la velocità dell'elemento materiale di S che all'istante t occupa la posizione G è $v(G|t)$.

Quindi, se il punto G deve essere associato sempre ad uno stesso elemento materiale, si deve avere

$$v(G|t) = \frac{1}{m} \int_C v(P|t) dm. \quad (V.22)$$

Si può mostrare che questa condizione è anche sufficiente affinché un elemento associato al centro di gravità all'istante iniziale, sia sempre baricentrico.

È facile vedere che tale caratteristica del centro di gravità è verificata non solo in moti rigidi, ma anche nei moti omografici, ovvero, nei moti tali che la distribuzione delle velocità ad ogni istante sia caratterizzata da una legge lineare rispetto alle coordinate di P

$$v(P|t) = v_0(t) + \alpha_t(P - O) \quad (V.23)$$

dove il simbolo α_t indica una omografia vettoriale dipendente dal tempo t.

Infatti, si ha

$$v(G|t) = v_0(t) + \alpha_t(G - O)$$

e

$$\int_C v(P|t) dm = \int_C [v_0(t) + \alpha_t(P - O)] dm = mv_0(t) + \int_C \alpha_t(P - O) dm.$$

Ma l'integrazione è commutabile con l'omografia, pertanto

$$\int_C \alpha_t(P - O) dm = \alpha_t \int_C (P - O) dm$$

ed infine⁷

$$\frac{1}{m} \int_C v(P|t) dm = v_0(t) + \alpha_t \frac{1}{m} \int_C (P - O) dm = v_0(t) + \alpha_t(G - O) = v(G|t).$$

Q.E.D.

Notiamo che per ogni corpo avente ad ogni istante un centro G di simmetria, sia geometrico che materiale, si può affermare, in virtù delle proprietà elementari del centro di gravità e grazie a ciò che si è appena detto riguardo i centri di gravitazione, che G è sia un centro di gravità, sia un centro di gravitazione.

⁷Applicando la relazione(V.20). -ndt

V.4 Ulteriori ipotesi che conducono alle equazioni differenziali ordinarie

V.4.1 Generalità ed ipotesi I

Cerchiamo ora di enunciare esplicitamente le ipotesi aggiuntive che poniamo alla base della teoria relativistica del moto gravitazionale.

Difatti, le condizioni che trattiamo dovrebbero essere le conseguenze matematiche delle equazioni differenziali del moto di ogni punto. A causa delle difficoltà insormontabili che comporterebbe questo approccio matematico rigido, troviamo conveniente postulare qualche caratteristica generale del moto in accordo con le osservazioni astronomiche.

Ipotesi I. Presupponiamo che il centro di gravità G di ogni corpo C sia solidale, cioè che risulti sempre legato allo stesso elemento materiale.

Non però è necessario che questa condizione sia verificata rigorosamente, sarà sufficiente solamente che sia soddisfatta nell'ordine di approssimazione 10^{-n} , che abbiamo introdotto per la correzione einsteiniana, $n \geq 2$ come abbiamo osservato nella Sezione 2.3.

Se G è solidale, il suo moto sarà caratterizzato allo stesso modo di ogni altro punto materiale P (vedi Sezione 2) attraverso una funzione Lagrangiana $\mathfrak{L} = \mathfrak{R} + \mathfrak{D}$ ben determinata, e la perturbazione einsteiniana attraverso il corrispondente termine $\mathfrak{D}$.

Assumiamo inoltre che il centro di gravità G sia sempre un centro di gravitazione.

V.4.2 Ipotesi II

Assumiamo che il corpo C sia guidato da un moto quasi traslatorio. Spieghiamo immediatamente il significato che va attribuito a questo termine.

Partiamo dalla definizione di moto traslatorio di un corpo C . Questo è un tipo di moto in cui i punti del corpo sono in un dato istante, spinti dallo stesso vettore velocità, diciamo la velocità v_g del centro di gravità G .

Praticamente, si può in modo naturale pensare come traslatorio qualsiasi moto per cui, rispetto a v_g (il modulo del vettore v_g), il valore assoluto del vettore differenza Δv tra le velocità di due punti qualsiasi di C allo stesso istante risulti

trascurabile. Dunque, il rapporto

$$\frac{|\Delta v|}{v_g} \quad (V.24)$$

sarà trascurabile.

Non pretenderemo che questo rapporto sia esso stesso trascurabile, ma solo che non superi mai qualche centesimo (ordine di grandezza 10^{-2}), così potremmo omettere, in quanto grandezza di ordine superiore al primo, ogni prodotto del tipo

$$\beta^2 \frac{|\Delta v|}{v_g}, \gamma \frac{|\Delta v|}{v_g}, \dots$$

Chiamiamo un moto di questo tipo quasi traslatorio.

E questo è ciò che avviene per i pianeti.

In primo luogo, le loro deformazioni sono trascurabili, ed essi si comportano, di conseguenza, come corpi che possono essere considerati rigidi.

In verità, il loro moto non risulta puramente traslatorio: esso è costituito da traslazione e rotazione.

Comunque, per un punto qualsiasi del corpo, la velocità dovuta alla rotazione aggiunge solo pochi centesimi della velocità traslazionale comune in tutto il corpo.

Per esempio, nel caso della Terra, la velocità dovuta alla rotazione (una rotazione completa al giorno) ha il valore massimo di mezzo kilometro al secondo, mentre la velocità di traslazione è 30 km/sec. Quindi

$$\frac{|\Delta v|}{v_g} \sim 2 \times \frac{1}{60} = 0.03.$$

Chiaramente un ordine di grandezza che ricade nei limiti appena indicati.

V.4.3 Ipotesi III

Assumiamo che la quantità

$$\left(\frac{d}{r}\right)^2,$$

quadrato del rapporto della dimensione massima d di C sulla distanza minima r che intercorre tra i punti del corpo C e quelli di S' , sia trascurabile.

Vedremo che questa circostanza è usualmente permessa, dal tempo di Clairaut, nella Meccanica celeste newtoniana per ridurre il problema classico degli n -corpi al problema di n punti materiali.

Non siamo qui interessati ad un'approssimazione grossolana dell'ordine di 10^{-2} , ma di una molto più precisa, per esempio, dell'ordine di 10^{-4} nel caso tipico Sole-Terra, altrimenti dovremmo tener conto di termini correttivi, come avviene nello studio delle perturbazioni dovute ai satelliti di Giove.

V.4.4 Alcune conseguenze delle ipotesi precedenti

Notiamo per prima cosa che, a causa dell'Ipotesi I, le derivate di γ'' sono nulle in G, e dato che questo potenziale è coinvolto in modo additivo in $\mathfrak{L}$ e porta di conseguenza il suo contributo alle equazioni del moto solo attraverso le sue derivate, segue che γ'' si comporta come una costante.

In accordo con l'Ipotesi II, le componenti β_i della velocità di ogni punto di C e il quadrato β^2 di questa velocità sono, come γ'' , invarianti all'interno di C. Così possiamo porre, in primo luogo,

$$\gamma'' = \bar{\omega} = \text{cost.} \quad (\text{V.25})$$

Questo comporta per φ'' , ψ'' , ψ_i'' le seguenti espressioni:

$$\varphi'' = \frac{f}{c^2} \int_C \frac{\mu \gamma''}{r} dC = \bar{\omega}^2, \quad (\text{V.26})$$

$$\psi'' = \frac{3}{2} \frac{f}{c^2} \int_C \frac{\mu \beta^2}{r} dC = \frac{3}{2} \bar{\omega} \beta^2, \quad (\text{V.27})$$

$$\gamma_i'' = \frac{f}{c^2} \int_C \frac{\mu \beta_i}{r} dC = \bar{\omega} \beta_i. \quad (\text{V.28})$$

Infine, si ha

$$v'' = \frac{1}{2} \frac{f}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} \int_C \mu r dC = 0, \quad (\text{V.29})$$

perché l'integrale

$$\int_C \mu r dC,$$

dove r rappresenta la distanze tra qualsiasi punto di C ed il centro di gravità, è, come μdC , una costante durante il moto.

Dai risultati precedenti, si ha

$$\Re' \gamma'' = \left(\frac{1}{2} \beta^2 + \gamma' \right) \gamma'' = \bar{\omega} \left(\frac{1}{2} \beta^2 + \gamma' \right),$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\gamma''^2 = -\frac{1}{2}\bar{\omega}^2, \\ -2\gamma'\gamma'' = -2\bar{\omega}\gamma', \\ \psi'' = \frac{3}{2}\bar{\omega}\beta^2, \\ \gamma_i'' = \bar{\omega}\beta_i. \end{cases} \quad (\text{V.30})$$

Queste espressioni coinvolgono semplificazioni che sono essenziali per la struttura della perturbazione einsteiniana, ma al fine di tenerle in considerazione sarà necessario avere un'immagine complessiva della questione considerando l'insieme dei corpi in moto.

E questo è l'obiettivo nella prossima sezione.

V.5 Il problema degli n-corpi

V.5.1 Raggi gravitazionali. Notazioni

Denotiamo con C_v ($v = 0, 1, \dots, n-1$) i corpi e con P_v il centro di gravità di C_v , con m_v e

$$l_v = \frac{fm_v}{c^2} \quad (\text{V.31})$$

la massa e il raggio gravitazionale di C_v .

Sarebbe opportuno ricordare che questo raggio è una lunghezza che, per il Sole, è di circa un kilometro e mezzo.

In più, l'attrazione di un corpo celeste C_v , esercitata su un punto molto distante, si riduce, praticamente, a quella di tutta la sua massa concentrata nel centro di gravità.

Dunque, in virtù dell'Ipotesi III, il potenziale del corpo C_v nel centro di gravità P_h del corpo C_h è dato, come se la massa di C_v fosse interamente concentrata nel centro di gravità P_v , da

$$\frac{fm_v}{r(P_v, P_h)} \quad (\text{V.32})$$

e il corrispondente potenziale adimensionale è, di conseguenza,

$$\frac{f}{c^2} \frac{m_v}{r(P_v, P_h)} = \frac{l_v}{r(P_v, P_h)}. \quad (\text{V.33})$$

Analogamente, e con lo stesso grado di approssimazione, si può ritenere costante ed uguale ad

$$\frac{l_v}{r(P_v, P_h)}$$

il potenziale unitario dovuto all'attrazione del corpo C_v , all'interno del corpo C_h .

Nel nostro sistema planetario, i raggi gravitazionali l non superano quello del Sole, come abbiamo appena ricordato.

D'ora in poi, assoceremo l'indice h ad ogni quantità collegata al centro di gravità P_h del corpo C_h ; per esempio, β_h^2 è il quadrato della velocità di P_h ; $\beta_{h|i}$ è la componente lungo l'asse x_i della velocità di P_h , γ'_h è il potenziale in P_h dovuto a tutti i corpi contrassegnati con un indice diverso da h ; etc.

Così avremo⁸

$$\gamma'_h = \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l}{r(P_v, P_h)}. \quad (V.34)$$

Se dobbiamo fissare in particolare un punto P all'interno di C_h , scriveremo naturalmente

$$\sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l_v}{r(P_v, P)}, \quad (V.34')$$

essendo il valore numerico, ovviamente, ancora γ'_h , entro l'ordine di approssimazione che è stata adottata.

In linea con le considerazioni precedenti, possiamo ritenere costante l'integrale

$$\gamma'_h = \frac{f}{c^2} \int_{C_h} \frac{\mu(Q)}{r(Q, P)} dG_h = \bar{\omega}_h, \quad (V.25)$$

che fornisce il potenziale del corpo C_h in un punto qualsiasi P del corpo stesso, dal momento che siamo interessati precisamente a considerare il valore di γ''_h in P_h , e sappiamo che le derivate di γ''_h in P_h sono nulle.

Segue facilmente che $\bar{\omega}_h$ sia, come risulta essere d'altra parte anche il potenziale adimensionale γ in ogni punto, una quantità del primo ordine.⁹

⁸Abbiamo modificato la notazione originale per comodità di scrittura. -ndt

⁹Si ha

$$\bar{\omega}_h = \frac{f}{c^2} \int_{C_h} \frac{\mu dC_h}{r(Q, P_h)} \leq \frac{f}{c^2} \bar{\mu} 4\pi \int_0^{\bar{r}} p dp = \frac{f}{c^2} 2\pi \bar{r}^2 \bar{\mu} = \frac{3}{2} \frac{f \bar{m}}{c^2} \frac{1}{\bar{r}} = \frac{\bar{l}}{\bar{r}},$$

dove $\bar{\mu}$ è il limite superiore di μ in C_h , $\bar{r}$ è la distanza massima del centro di gravità P_h alla superficie del corpo C_h , $\bar{m}$ è la massa contenuta in una sfera omogenea di densità $\bar{\mu}$ e raggio $\bar{r}$, ed $\bar{l}$ il raggio gravitazionale corrispondente.

V.5.2 Calcolo dei potenziali φ_h . Quantità assimilabili a costanti

Si ha, innanzitutto

$$\varphi_h = \varphi'_h + \varphi''_h, \quad (V.26)$$

dove

$$\varphi'_h = -\frac{f}{c^2} \int_{S'} \frac{\mu\gamma}{r(Q, P)} dS' \quad (V.27)$$

se Q indica un punto dell'integrazione appartenente a S' e P un punto parametrico arbitrario di C_h , in particolare P_h . Ma se S' è l'insieme dei corpi C_v , con l'eccezione di C_h , si ha, praticamente in accordo con l'Ipotesi III

$$\begin{aligned} \varphi'_h &= -\frac{f}{c^2} \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{1}{r(P_v, P)} \int_{C_v} \mu(Q) \gamma_v(Q) dC_v \\ &= -\frac{f}{c^2} \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{1}{r(P_v, P)} \left[\int_{C_v} \mu(Q) \gamma'_v(Q) dC_v + \int_{C_v} \mu(Q) \gamma''_v(Q) dC_v \right] \\ &= -\frac{f}{c^2} \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{1}{r(P_v, P)} \sum_{\substack{\rho=0, \\ \rho \neq h}}^{n-1} \frac{l_p m_v}{r(P_v, P_p)} \\ &\quad - \left(\frac{f}{c^2} \right)^2 \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{1}{r(P_v, P)} \int_{C_v} \mu(Q) dC_v \int_{C_v} \frac{\mu(Q') dC_v}{r(Q', Q)} \\ &= \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l_v}{r(P_v, P)} \sum_{\substack{\rho=0, \\ \rho \neq h}}^{n-1} \frac{l_p}{r(P_v, P_p)} - \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l_v \chi_v}{r(P_v, P)}, \end{aligned} \quad (V.28)$$

avendo posto

$$l_v \chi_v = \left(\frac{f}{c^2} \right)^2 \int_{C_v} \mu(Q) dC_v \int \frac{\mu(Q') dC_v}{r(Q', Q)}. \quad (V.29)$$

È conveniente scrivere

$$\varphi'_h = \varphi^{f*}_h - \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l_v \chi_v}{r(P_v, P)}, \quad (V.30)$$

dove

$$\varphi_h'^* = - \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l_v}{r(P_v, P)} \sum_{\substack{\rho=0, \\ \rho \neq h}}^{n-1} \frac{l_\rho}{r(P_v, P_\rho)}. \quad (V.31)$$

Focalizziamo ora la nostra attenzione su

$$\begin{aligned} \varphi_h'' &= -\frac{f}{c^2} \int_{C_h} \frac{\mu(\gamma_h' + \gamma_h'')}{r(Q, P)} dC_h \\ &= -\frac{f}{c^2} \int_{C_h} \frac{\mu}{r(Q, P)} \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l_v}{r(P_v, P)} dC_v - \frac{f}{c^2} \int_{C_h} \frac{\mu \gamma_h''}{r(Q, P)} dC_h \\ &= - \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l_v}{r(P_v, P)} \int_{C_h} \frac{\mu dC_h}{r(Q, P)} - \frac{f}{c^2} \int_{C_h} \frac{\mu \gamma_h''}{r(Q, P)} dC_h. \end{aligned} \quad (V.32)$$

L'integrale

$$\int_{C_h} \frac{\mu dC_h}{r(Q, P)}$$

deve essere calcolato in P_h , così può essere assimilato con la costante $\bar{\omega}_h$, e la prima sommatoria si riduce a

$$-\bar{\omega}_h \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l_v}{r(P_v, P)}.$$

Per quanto riguarda il secondo termine

$$-\frac{f}{c^2} \int_{C_h} \frac{\mu \gamma_h''}{r(Q, P)} dC_h,$$

notiamo che:

- il corpo C_h è simmetrico rispetto al suo centro di gravità P_h , dunque

$$\mu(Q) = \mu(Q'),$$

- se Q, Q' sono simmetrici rispetto a P_h , ciò comporta che

$$\gamma''(Q) = \gamma''(Q').$$

Quindi

$$(\mu\gamma_h'')_Q = (\mu\gamma_h'')_{Q'}.$$

Segue che la quantità considerata ha derivate nulle in P_h e può essere assimilata a una nuova costante $\bar{\omega}'_h$ del corpo C_h , che è additiva e, pertanto, trascurabile. Così abbiamo in definitiva

$$\varphi_h'' = -\bar{\omega}_h \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l_v}{r(P_v, P)} \quad (V.33)$$

e

$$\varphi_h = \varphi_h'^* + \varphi_h''^*, \quad (V.34)$$

avendo posto

$$\varphi_h''^* = - \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l_v(\chi_v + \bar{\omega}_h)}{r(P_v, P)}. \quad (V.35)$$

V.5.3 Calcolo dei termini ψ'_h, v'_h, γ_i

Si ha evidentemente

$$\psi'_h = \frac{3}{2} \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l_v \beta_v^2}{r(P_v, P_h)} \quad (V.36)$$

e

$$v'_h = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} l_v r(P_v, P_h). \quad (V.37)$$

Qui applichiamo l'osservazione che il valore dell'integrale

$$\int_D \mu r \, dC \quad (V.38)$$

in un punto P molto distante si riduce moltissimo, cioè a dei termini dell'ordine $(d/r)^2$, il prodotto della massa di C per la distanza di P dal centro di gravità di C , com'è il caso dell'attrazione.

L'espressione delle quantità γ_i è

$$\gamma_{h|i} = \gamma'_{h|i} + \gamma''_{h|i}, \quad (V.39)$$

dove

$$\begin{cases} \gamma'_{h|i} = \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{l_v \beta_{v|i}}{r(P_v, P)}, \\ \gamma''_{h|i} = \bar{\omega}_h \beta_{h|i}. \end{cases} \quad (V.40)$$

V.5.4 Coefficienti di massa (masse relative)

Qui di seguito sarà conveniente introdurre i rapporti (frazioni proprie)

$$\lambda_v = \frac{m_v}{m} \quad (v = 0, 1, \dots, n-1), \quad (\text{V.41})$$

tali che

$$\sum_{v=0}^{n-1} \lambda_v = 1. \quad (\text{V.42})$$

Quindi, se l è il raggio gravitazionale della massa totale

$$l = \frac{fm}{c^2}, \quad (\text{V.43})$$

si ha

$$l_v = \lambda_v l \quad (v = 0, 1, \dots, n-1). \quad (\text{V.44})$$

V.5.5 I tre termini della funzione lagrangiana $\mathfrak{L}_h$: $\mathfrak{R}_h$ (la parte newtoniana), $\mathfrak{D}'_h$ (la perturbazione einsteiniana puntuale, $\mathfrak{D}''_h$ (la perturbazione einsteiniana dovuta all'estensione)

Gli sviluppi precedenti sono sufficienti per scrivere le espressioni esplicite delle funzioni $\mathfrak{D}'_h, \mathfrak{D}''_h$. Esse risultano

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}'_h = & \frac{1}{2} \mathfrak{R}'_h{}^2 - \gamma'_h{}^2 + \gamma'_h \beta_h^2 + l \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v}{r(P_v, P_h)} \left[\frac{3}{2} \beta_h^2 - \gamma'_v - 4 \underline{\beta}_h \times \underline{\beta}_v \right] \\ & + \frac{1}{2} l \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \lambda_v r(P_v, P_h). \end{aligned} \quad (\text{V.45})$$

Per quanto riguarda $\mathfrak{D}''_h$, osserviamo che

$$\zeta''_h = \varphi''_h{}^* + \psi''_h. \quad (\text{V.46})$$

Ma (V.12)

$$\mathfrak{D}''_h = \mathfrak{R}'_h \bar{\omega}_h - 2 \bar{\omega}_h \gamma'_h + \zeta''_h + \bar{\omega}_h \beta_h^2 - 4 \sum_{i=1}^3 \gamma''_{h|i} \beta_{h|i},$$

dunque, sostituendo le espressioni ricavate da $\varphi_h''^*, \psi_h'', \gamma_{h|i}''$ [(V.35) e (V.40)], si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_h'' &= \bar{\omega}_h \left(\frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma_h' \right) - 2\bar{\omega}_h \gamma_h' + \bar{\omega}_h \beta_h^2 - 4\bar{\omega}_h \beta_h^2 \\ &\quad + \frac{3}{2} \bar{\omega}_h \beta_h^2 - l \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v (\chi_v + \bar{\omega}_h)}{r(P_v, P)} \\ &= -\bar{\omega}_h \beta_h^2 - l \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v (\chi_v + 2\bar{\omega}_h)}{r(P_v, P)}. \end{aligned} \quad (\text{V.47})$$

La funzione lagrangiana $\mathcal{L}_h$ del problema degli n-corpi è quindi

$$\mathcal{L}_h = \mathfrak{R}_h + \mathfrak{D}_h' + \mathfrak{D}_h'', \quad (\text{V.48})$$

dove

$$\mathfrak{R}_h = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma_h'$$

è il termine newtoniano;

$$\mathfrak{D}_h' = \frac{1}{2} \mathfrak{R}_h'^2 - \gamma_h'^2 + \zeta_h' + \gamma_h' \beta_h^2 - 4 \sum_{i=1}^3 \gamma_{h|i}' \beta_{h|i} \quad (\text{V.49})$$

è il termine correttivo einsteiniano per le masse ridotte a punti, che risale sostanzialmente a Droste e a De Sitter (vedi Prefazione); ricordiamo che

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_h' = \varphi_h' + \psi_h' + v_h', \\ \varphi_h'^* = -l^2 \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v}{r(P_v, P)} \sum_{\substack{p=0, \\ p \neq v}}^{n-1} \frac{\lambda_p}{r(P_v, P_p)}, \\ \psi_h' = \frac{3}{2} l \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v \beta_v^2}{r(P_v, P)}, \\ v_h' = \frac{1}{2} l \frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2} \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \lambda_v r(P_v, P), \\ \gamma_{h|i}' = l \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v \beta_{v|i}}{r(P_v, P)}; \end{array} \right. \quad (\text{V.50})$$

infine

$$\mathfrak{D}_h'' = -\bar{\omega}_h \beta_h^2 - l \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v (\chi_v + 2\bar{\omega}_h)}{r(P_v, P_h)}$$

è il termine correttivo dovuto all'estensione dei corpi.

V.5.6 Costanti che appaiono nelle equazioni differenziali

Nei tre termini della funzione lagrangiana appena esplicitati, appaiono, in aggiunta ai coefficienti di massa λ_h , $2n$ parametri gravitazionali $\bar{\omega}_h, \chi_h$, ciascuno dei quali dipende dalla struttura materiale del corpo C_h e che, secondo le nostre ipotesi, si comportano come costanti del moto.

Questi parametri compaiono, tuttavia, solamente nei termini $\mathfrak{D}_h''$ derivanti dalla correzione einsteiniana dovuta all'estensione.

Inoltre, nella nostra approssimazione è possibile eliminare tutti questi parametri mediante un opportuno artificio (vedi Capitolo VI, Sezione 1.2) combinato con una lieve modifica dei coefficienti λ , ovvero, attraverso una piccola alterazione delle costanti che caratterizzano le masse.

V.5.7 Precauzioni da osservare nella costruzione delle equazioni differenziali

La funzione lagrangiana $\mathfrak{L}_h$ è connessa alle coordinate x^i del punto P ed alle componenti $\beta_{h|i}$ della sua velocità, avendo cura che, dopo la differenziazione, le coordinate x^i devono essere sostituite dalle coordinate x_h^i del centro di gravità del corpo C_h .

Il punto P_h stesso e tutti gli altri P_v ($v \neq h$), come anche le componenti $\beta_{v|i}$ delle loro velocità, saranno parametri quando viene applicata la differenziazione rispetto alle x^i .

Bisogna fare una speciale osservazione circa la differenziazione rispetto a x^0 , che appare nell'espressione di v_h' . Questa derivata parziale è indipendente dalle coordinate x^i ($i = 1, 2, 3$) del punto P , mentre influenza direttamente la variazione della funzione rispetto al tempo, a causa del moto degli altri punti (parametrici) P_v ($v \neq h$).

È per questo che denoteremo in modo specifico l'operazione $\frac{\partial}{\partial x^0}$ con la notazione

$$\frac{\partial'^{(h)}}{\partial' x^0},$$

scrivendo in accordo con ciò

$$v'_h = \frac{1}{2} l \frac{\partial'^{(h)}}{\partial' x^0} \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \lambda_v r(P_v, P). \quad (\text{V.51})$$

Capitolo VI

Il problema dei due-corpi. Estensione del principio di eliminazione al caso generale degli n -corpi

VI.1 La funzione di Lagrange per il moto assoluto di ciascuno dei due corpi

VI.1.1 Notazioni correlate il più possibile all'uso classico

Ci proponiamo ora di applicare la teoria generale sviluppata nel Capitolo V al caso particolarmente importante di due corpi celesti.

Le conclusioni a cui giungeremo alla fine sono valide, non solo per i casi classici di Sole-Pianeta o Pianeta-Satellite, ma anche per stelle binarie, per le quali l'astronomia è stata in grado, in molte centinaia di casi, di determinarne le orbite, sia attraverso osservazioni dirette sia grazie a metodi spettroscopici.¹

Denoteremo con l'indice h tutte le quantità (scalari o vettoriali) collegate ad uno dei due corpi e con l'indice $h + 1$ quelle collegate all'altro, considerando, naturalmente, identificabili gli indici di ugual parità 0, 2; 1, 3. Segue che le

¹Cf. Armellini, *Trattato di Astronomia siderale*, Bologna, Zanichelli, vol.2, 1931.

somme del Capitolo V, Sezione 5:

$$\sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1}, \quad \sum_{\substack{p=0, \\ p \neq v}}^{n-1},$$

si riducono ad un singolo termine che porta l'indice $h+1, v+1, \dots$. In questo modo abbiamo

$$\gamma'_h = \frac{l\lambda_{h+1}}{r(P_{h+1}, P)}, \quad (\text{VI.1})$$

$$\varphi'^*_h = -l^2 \frac{\lambda_{h+1}}{r(P_{h+1}, P)} \frac{\lambda_h}{r(P_{h+1}, P_h)}. \quad (\text{VI.2})$$

Per formare le equazioni del moto del punto P_h , centro di gravità di C_h , dobbiamo derivare la funzione φ'^*_h rispetto alle coordinate del punto P , ponendo, dopo la differenziazione $P \equiv P_{h+1}$, mentre la distanza $r(P_{h+1}, P_h)$ va considerata come una costante.

Per evitare qualsiasi confusione, introduciamo per la distanza $P_h P_{h+1}$ le due notazioni r ed r^* , con la convenzione che r^* non deve essere differenziato e che $r \equiv r(P_{h+1}, P_h)$ può sostituire ciò che abbiamo finora indicato con $r(P_{h+1}, P)$, e anche quando si tratta di differenziare e sostituire P_h con P .

Poniamo dunque

$$\varphi'^*_h = -l^2 \frac{\lambda_{h+1}}{r} \frac{\lambda_h}{r^*} \quad (\text{VI.2}')$$

e

$$\gamma'_h = \frac{l\lambda_{h+1}}{r}. \quad (\text{VI.1})$$

Si ha ancora

$$\psi'_h = \frac{3}{2} l \frac{\lambda_{h+1} \beta_{h+1}^2}{r}, \quad (\text{VI.3})$$

$$v'_h = \frac{1}{2} l \lambda_{h+1} \frac{\partial'^{(h)2} r}{\partial' x^{02}}, \quad (\text{VI.4})$$

$$\gamma'_{h|i} = \frac{l\lambda_{h+1} \beta_{h+1|i}}{r}. \quad (\text{VI.5})$$

Scriviamo ora le espressioni delle funzioni

$$\mathfrak{R}_h = \mathfrak{R}'_h, \quad \mathfrak{D}'_h, \quad \mathfrak{D}''_h$$

nel caso dei due-corpi.

Si ha

$$\mathfrak{R}_h = \mathfrak{R}'_h = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \frac{l\lambda_{h+1}}{r} \quad (\text{VI.6})$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}'_h = & \frac{1}{2} \mathfrak{R}_h'^2 - \gamma_h'^2 - l^2 \frac{\lambda_h \lambda_{h+1}}{r^* r} \\ & + \frac{3}{2} \frac{l \lambda_{h+1} \beta_{h+1}^2}{r} + \frac{1}{2} l \lambda_{h+1} \frac{\partial'^{(h)2} r}{\partial' \chi^{02}} + \gamma_h' \beta_h^2 - 4 \frac{l \lambda_{h+1}}{r} \sum_{i=1}^3 \beta_{h|i} \beta_{h+1|i}, \end{aligned} \quad (\text{VI.7})$$

dove, ripetiamo, r rimpiazza $r(P_{h+1}, P_h)$, mentre r^* ha lo stesso valore, ma non deve essere differenziato rispetto alle coordinate di P_h .

L'espressione di $\mathfrak{D}''_h$ risulta

$$\mathfrak{D}''_h = -\bar{\omega}_h \beta_h^2 - \frac{l \lambda_{h+1} (\chi_{h+1} + 2\bar{\omega}_h)}{r}. \quad (\text{VI.8})$$

VI.1.2 Semplificazioni permesse dalla nostra approssimazione. Artificio che fa emergere il principio di eliminazione

È possibile semplificare la funzione lagrangiana attraverso il seguente artificio, come abbiamo anticipato nel Capitolo V, Sezione 4.6 per n qualsiasi.

Introduciamo una costante σ_h (del primo ordine) non specificata *a priori*, e consideriamo la funzione

$$(1 + \sigma_h) \mathfrak{L}_h, \quad (\text{VI.9})$$

la quale, trascurando i termini $\sigma_h \mathfrak{D}'_h$ e $\sigma_h \mathfrak{D}''_h$ (che sarebbero almeno del terzo ordine), si riduce a

$$(1 + \sigma_h) \mathfrak{R}'_h + \mathfrak{D}'_h + \mathfrak{D}''_h$$

e che dà luogo alle stesse equazioni racchiuse nella formula variazionale

$$\delta \int \mathfrak{L}_h dt = 0.$$

Saremo in grado di trarre vantaggio dell'indeterminazione di σ_h per semplificare la forma della funzione, modificando leggermente le due costanti λ_h , che ci permetterebbe di eliminare le quattro costanti $\bar{\omega}_h, \chi_h$ delle equazioni differenziali.

Si ha, infatti, trascurando momentaneamente $\mathfrak{D}'_h$,

$$\begin{aligned} (1 + \sigma_h) \mathfrak{R}'_h + \mathfrak{D}''_h \\ = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \frac{l \lambda_{h+1}}{r} [1 + \sigma_h - (\chi_{h+1} + 2\bar{\omega}_h)] + \frac{1}{2} (\sigma_h - \bar{\omega}_h) \beta_h^2. \end{aligned} \quad (\text{VI.10})$$

Dunque è sufficiente scegliere

$$\sigma_h = 2\bar{\omega}_h \quad (\text{VI.11})$$

e porre

$$\lambda'_h = \lambda_h(1 - \chi_h) \quad (h = 0, 1), \quad (\text{VI.12})$$

che corrisponde a un'altra piccola alterazione delle masse, per avere questa prima parte della funzione lagrangiana nella forma

$$\frac{1}{2}\beta_h^2 + \frac{l\lambda'_{h+1}}{r}. \quad (\text{VI.13})$$

In realtà, nell'espressione di $\mathcal{D}'_h$, compaiono ancora i vecchi coefficienti di massa λ , ma dal momento che i termini di $\mathcal{D}'_h$ sono tutti di un ordine superiore, possiamo tranquillamente sostituire i λ con i corrispondenti λ' appena introdotti attraverso la (VI.12).

In definitiva, scrivendo ancora λ (coefficiente costante che gioca il ruolo della massa) invece di λ' , ci siamo ricondotti, per definire il moto del punto P_h , alla funzione di Lagrange

$$\mathcal{L}_h = \mathfrak{R}_h + \mathfrak{D}_h, \quad (\text{VI.14})$$

dove

$$\mathfrak{R}_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \frac{l\lambda_{h+1}}{r} \quad (\text{VI.15})$$

e

$$\mathfrak{D}_h = \frac{1}{2}\mathfrak{R}_h^2 - \gamma_h^2 - \gamma_h\gamma_{h+1}^* + \mathfrak{D}_h^{(1)} + \mathfrak{D}_h^{(2)}, \quad (\text{VI.16})$$

avendo posto

$$\gamma_h = \frac{l\lambda_{h+1}}{r}, \quad \gamma_h^* = \frac{l\lambda_{h+1}}{r^*},$$

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_h^{(1)} = \gamma_h \left(\beta_h^2 - 4\beta_h \times \beta_{h+1} + \frac{3}{2}\beta_{h+1}^2 \right), \\ \mathfrak{D}_h^{(2)} = \frac{1}{2}l\lambda_{h+1} \frac{\partial'^{(h)2}r}{\partial'^2 x^{02}}. \end{cases} \quad (\text{VI.17})$$

È importante notare che, in accordo con le trasformazioni appena presentate, i termini $\mathfrak{D}_h''$, che dipendevano in aggiunta dalle quattro costanti gravitazionali $\bar{\omega}_h, \chi_h$, sono completamente spariti. In questo modo abbiamo ottenuto l'eliminazione di ciò che, nelle equazioni differenziali, dipendeva ancora dall'estensione dei corpi, assimilandoli in questo senso a semplici punti materiali.

VI.2 Moto relativo

VI.2.1 Formule correlate al problema dei due-corpi in Meccanica classica considerate come preparatorie per la trattazione relativistica

Avendo in mente il primo membro di una delle equazioni del second'ordine che definisce sia il movimento assoluto dei due corpi sia la loro integrazione, notiamo prima che nel calcolo dei binomi lagrangiani classici

$$\beta_{h|i} = \frac{d}{dx^0} \frac{\partial}{\partial \beta_{h|i}} - \frac{\partial}{\partial x_h^i} \quad (h = 0, 1; i = 1, 2, 3), \quad (\text{VI.18})$$

è conveniente introdurre, dopo la differenziazione, le coordinate relative di uno dei due corpi, diciamo P_1 , rispetto all'altro, P_0 , cioè, le differenze

$$x^i = x_1^i - x_0^i = (-1)^h (x_{h+1}^i - x_h^i) = (-1)^{h+1} (x_h^i - x_{h+1}^i), \quad (\text{VI.19})$$

e le componenti della velocità assoluta in una funzione delle componenti della velocità relativa $\underline{\beta}$ corrispondente.

Per fare questo è sufficiente contare sulla definizione di velocità relativa

$$\underline{\beta} = \underline{\beta}_1 - \underline{\beta}_0 = (-1)^h (\underline{\beta}_{h+1} - \underline{\beta}_h) = (-1)^{h+1} (\underline{\beta}_h - \underline{\beta}_{h+1}). \quad (\text{VI.20})$$

È molto importante notare che, quando troviamo termini di ordine superiore, possiamo legittimamente associare alla (VI.20) la semplificazione classica riguardante l'immobilità del centro di gravità.

Per questo, si devono tenere in mente le seguenti riflessioni.

Lo spazio-tempo che è alla base della nostra teoria è poco differente dallo spazio pseudo-euclideo o di Einstein-Minkowski. Perciò possiamo ancora scegliere questo spazio, per cui la parte principale di ds^2 è ds_0^2 , in modo tale che l'origine sia il centro di gravità dei due punti P_0, P_1 , la cui velocità è costante e può essere considerata nulla nell'approssimazione newtoniana.

Così abbiamo in prima approssimazione

$$\lambda_h \underline{\beta}_h + \lambda_{h+1} \underline{\beta}_{h+1} = 0. \quad (\text{VI.21})$$

Questa equazione ci permette di esprimere le velocità assolute in funzione di $\underline{\beta}$. Si ha, combinando con la relazione (V.20):

$$\begin{cases} \underline{\beta}_h &= (-1)^{h+1} \lambda_{h+1} \underline{\beta} + \mathcal{O}[2], \\ \underline{\beta}_{h+1} &= (-1)^h \lambda_h \underline{\beta} + \mathcal{O}[2]. \end{cases} \quad (\text{VI.22})$$

Queste espressioni approssimate delle velocità assolute saranno evidentemente sufficienti nei calcoli dei termini di ordine superiore al primo.

Similmente, nel calcolo della correzione einsteiniana di un moto kepleriano², tutte le altre quantità potranno essere ugualmente sostituite per la determinazione che gli appartengono nel moto kepleriano.

Per comodità del lettore riscriviamo qui di seguito alcune formule classiche correlate, usando le notazioni attuali.

Nei calcoli seguenti, ci limiteremo a citare i numeri delle formule nella lista

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{l}{r} \right) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{equazioni del moto}), \quad (\text{VI.23})$$

$$\frac{1}{2} \beta^2 - \gamma = e \quad (\text{integrale delle forze vive}), \quad (\text{VI.24})$$

$$r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{c} \quad (\text{integrale delle aree nel piano delle orbite relative}), \quad (\text{VI.25})$$

designiamo con

$$e = \frac{E}{c^2} \quad (\text{VI.26})$$

la costante dell'energia E divisa per c^2 e con C la costante delle aree; la differenziazione rispetto x^0 è indicata con un punto. Inoltre, θ rappresenta l'anomalia vera nel piano delle orbite relative.

La costante $\frac{C}{c}$ è una lunghezza. Per quanto riguarda il suo ordine di grandezza, notiamo che nei moti planetari considerati, $r\dot{\theta}$ è la velocità trasversa divisa per c , quindi dell'ordine β , cioè $\frac{1}{2}$, e che, ovunque, $r^2\dot{\theta}$ è il prodotto di una lunghezza (dell'ordine di grandezza di distanze planetari) per un numero puro di ordine $\frac{1}{2}$.

Ricordando che

$$l = \frac{fm}{c^2}$$

è una lunghezza, conviene introdurre una nuova costante numerica a di ordine $\frac{1}{2}$, collegata a C attraverso la relazione

$$\frac{l}{a} = \frac{C}{c}. \quad (\text{VI.27})$$

Pertanto l'integrale delle aree è

$$r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{a}. \quad (\text{VI.25}')$$

²Vogliamo dire, a partire da condizioni iniziali che, nella teoria ordinaria, darebbero luogo a un moto rigorosamente kepleriano.

La quantità

$$\alpha = \frac{1}{r\dot{\theta}} \left(\frac{l}{r} \right) \quad (\text{VI.27'})$$

è dell'ordine $\frac{1}{2}$, perché $\frac{1}{r}$ è del primo ordine.

VI.2.2 Passaggio al moto relativo

Dopo quanto finora stabilito, osserviamo che l'applicazione formale degli operatori $B_{h|i}$ ($h = 0, 1$; $i = 1, 2, 3$) alle funzioni lagrangiane dei due corpi che oramai abbiamo completamente esplicitato, ci condurrebbe alle sei equazioni differenziali del secondo ordine del loro moto assoluto.

Dal momento che stiamo cercando il moto relativo, è sufficiente concettualmente ottenere tre equazioni del second'ordine aventi come incognite le coordinate relative (VI.19)

$$x^i = x_1^i - x_0^i.$$

Sarebbe stato chiaramente desiderabile, per quanto anticipato, evitare di esplicitare le sei equazioni suddette, e formare direttamente un'unica funzione lagrangiana contenente esclusivamente gli elementi del moto relativo, ma non siamo riusciti a realizzare questo calcolo in maniera sintetica.

In mancanza di ciò, abbiamo dovuto rassegnarci a calcolare successivamente i differenti termini delle equazioni del moto assoluto, limitandoci di far apparire al posto dei $B_{h|i}$, gli operatori B_i dove compaiono solamente, all'interno di termini di ordine superiore, le coordinate e le velocità relative. In questo modo si può, entro l'approssimazione indicata, ottenere dalle sei equazioni da cui partiamo, sei combinazioni, tre delle quali derivano da una funzione lagrangiana $\mathfrak{L}$ che coinvolge esclusivamente il moto relativo, e le altre definiscono il moto assoluto del centro di gravità.

VI.2.3 Applicazione dell'operatore $B_{h|i}$ a $\mathfrak{R}_h$

Rigorosamente, si ha

$$B_{h|i}\mathfrak{R}_h = \dot{\beta}_{h|i} + l\lambda_{h+1} \frac{\partial \frac{l}{r}}{\partial x_h^i}.$$

Dunque, tenendo conto dei valori approssimati (VI.22)

$$B_{h|i}\mathfrak{R}_h = (-1)^{h+1} \lambda_{h+1} \left(\dot{\beta}_i + l \frac{\partial \frac{l}{r}}{\partial x^i} \right) + \mathcal{O}[2].$$

Naturalmente, nei termini di $\mathfrak{D}_h$ dove $B_{h|i}\mathfrak{R}_h$ è moltiplicato per una quantità del prim'ordine, si possono trascurare i termini $\mathcal{O}[2]$.

Questo è il momento di far apparire (ovviamente con le notazioni attuali) la funzione lagrangiana classica del moto relativo newtoniano

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2}\beta^2 + \gamma, \quad (\text{VI.28})$$

dove

$$\gamma = \gamma_h + \gamma_{h+1} = \frac{l}{r}. \quad (\text{VI.29})$$

Si ha quindi

$$B_{h|i}\mathfrak{R}_h = (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}B_i\mathfrak{R}, \quad (\text{VI.30})$$

dove B_i indica l'operatore

$$B_i = \frac{d}{dx^0} \frac{\partial}{\partial \beta_i} - \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (\text{VI.31})$$

VI.2.4 Applicazione dell'operatore $B_{h|i}$ a $\frac{1}{2}\mathfrak{R}_h^2$

Si ha

$$\begin{aligned} B_{h|i}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{R}_h^2\right) &= \frac{d}{dx^0} \frac{\partial}{\partial \beta_{h|i}} \left(\frac{1}{2}\mathfrak{R}_h^2\right) - \frac{\partial}{\partial x_h^i} \left(\frac{1}{2}\mathfrak{R}_h^2\right) \\ &= \frac{d}{dx^0} \left(\mathfrak{R}_h \frac{\partial \mathfrak{R}_h}{\partial B_{h|i}}\right) - \mathfrak{R}_h \frac{\partial \mathfrak{R}_h}{\partial x_h^i} = \mathfrak{R}_h B_{h|i}\mathfrak{R}_h + \beta_{h|i}\dot{\mathfrak{R}}_h. \end{aligned}$$

Ma

$$B_{h|i}\mathfrak{R}_h = (-1)^{h+1}\lambda_{h+1} \left[\frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \gamma\right) - \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \right]$$

e

$$\dot{\mathfrak{R}}_h = \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{2}\lambda_{h+1}^2\beta^2 + \lambda_{h+1}\gamma \right),$$

quindi, escludendo i termini di ordine superiore, si ha

$$B_{h|i}\dot{\mathfrak{R}}_h = (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}\beta_i \frac{d}{dx^0} \left(\frac{1}{2}\lambda_{h+1}^2\beta^2 + \lambda_{h+1}\gamma \right).$$

Notando che il termine

$$\mathfrak{R}_h B_{h|i}\mathfrak{R}_h$$

è trascurabile poiché è di un ordine maggiore di 2, e tenendo in considerazione l'integrale delle forze vive (VI.24), si ha

$$\begin{aligned}
 B_{h|i} \left(\frac{1}{2} \mathfrak{R}_h^2 \right) &= (-1)^{h+1} (\lambda_{h+1}^2 + \lambda_{h+1}^3 \beta_i \dot{\gamma}) \quad (VI.32) \\
 &= (-1)^{h+1} (\lambda_{h+1}^2 + \lambda_{h+1}^3) \{ (\beta_i \gamma)^\cdot - \beta_i \dot{\gamma} \} \\
 &= (-1)^{h+1} (\lambda_{h+1}^2 + \lambda_{h+1}^3) \left\{ B_i \left(\frac{1}{2} \beta^2 \gamma \right) + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} - \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \right\} \\
 &= (-1)^{h+1} (\lambda_{h+1}^2 + \lambda_{h+1}^3) B_i \left(\frac{1}{2} \beta^2 \gamma - e\gamma \right).
 \end{aligned}$$

VI.2.5 Applicazione dell'operatore $B_{h|i}$ a $(-\gamma_h^2 - \gamma_h \gamma_{h+1}^*)$

Notiamo che la funzione in questione non dipende dai $B_{h|i}$. Così l'operatore si riduce a

$$-\frac{\partial}{\partial x_h^i} = -(-1)^{h+1} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
 B_{h|i} (-\gamma_h^2 - \gamma_h \gamma_{h+1}^*) &= (-1)^{h+1} \frac{\partial}{\partial x^i} (\lambda_{h+1}^2 \gamma^2 + \lambda_h \lambda_{h+1} \gamma \gamma^*) \quad (VI.33) \\
 &= (-1)^{h+1} \left(2\lambda_{h+1}^2 \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} + \lambda_h \lambda_{h+1} \gamma^* \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \right) \\
 &= (-1)^{h+1} \lambda_{h+1} (2\lambda_{h+1} + \lambda_h) \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \\
 &= (-1)^{h+1} \lambda_{h+1} (\lambda_{h+1} + 1) \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \\
 &= (-1)^{h+1} \lambda_{h+1} (\lambda_{h+1} + 1) B_i \left(-\frac{1}{2} \gamma^2 \right).
 \end{aligned}$$

Per capire i passaggi di questo calcolo, è necessario ricordare l'osservazione riguardante r^* (Sezione 1.1).

VI.2.6 Applicazione dell'operatore $B_{h|i}$ a $\mathfrak{D}_h^{(1)}$

Si ha

$$\begin{aligned}
 B_{h|i} \mathfrak{D}_h^{(1)} &= B_{h|i} [\gamma_h (\beta_h^2 - 4\underline{\beta}_h \times \underline{\beta}_{h+1} + \frac{3}{2} \beta_{h+1}^2)] \\
 &= \frac{d}{dx^0} (2\gamma_h \beta_{h|i}) - 4 \frac{d}{dx^0} (\beta_{h+1|i} \gamma_h) - \beta_h^2 \frac{\partial \gamma_h}{\partial x_h^i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\beta_h \times \underline{\beta}_{h+1} \frac{\partial \gamma_h}{\partial x_h^i} - \frac{3}{2} \beta_{h+1}^2 \frac{\partial \gamma_h}{\partial x_h^i} \\
& = (-1)^{h+1} 2\lambda_{h+1}^2 (\beta_i \gamma)' - (-1)^{h+1} \lambda_{h+1}^3 \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \\
& \quad - (-1)^h 4\lambda_h \lambda_{h+1} (\beta_i \gamma)' \\
& \quad - (-1)^{h+1} 4\lambda_h \lambda_{h+1}^2 \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} - (-1)^{h+1} \frac{3}{2} \lambda_h^2 \lambda_{h+1} \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \\
& = (-1)^{h+1} 2\lambda_{h+1} (\lambda_h + 1) (\beta_i \gamma)' \\
& \quad - (-1)^{h+1} (\lambda_{h+1}^3 + 4\lambda_h \lambda_{h+1}^2 + \frac{3}{2} \lambda_h^2 \lambda_{h+1}) \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \\
& = (-1)^{h+1} 2\lambda_{h+1} (\lambda_{h+1}) (\beta_i \gamma)' \\
& \quad - (-1)^{h+1} \lambda_{h+1} (\lambda_{h+1}^2 + 4\lambda_h \lambda_{h+1} + \frac{3}{2} \lambda_h^2) \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \\
& = (-1)^{h+1} 2\lambda_{h+1} (\lambda_{h+1}) \left\{ B_i \left(\frac{1}{2} \beta^2 \gamma \right) + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \right\} \\
& \quad - (-1)^{h+1} \lambda_{h+1} (\lambda_{h+1}^2 + 4\lambda_h \lambda_{h+1} + \frac{3}{2} \lambda_h^2) \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \\
& = (-1)^{h+1} 2\lambda_{h+1} (\lambda_{h+1}) B_i \left(\frac{1}{2} \beta^2 \gamma \right) \\
& \quad + (-1)^{h+1} \lambda_{h+1} \left\{ \lambda_{h+1} - \lambda_{h+1}^2 - 4\lambda_h \lambda_{h+1} - \frac{3}{2} \lambda_h^2 \right\} \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

Ricordando che

$$\lambda_h + \lambda_{h+1} = 1,$$

si ha

$$\begin{aligned}
& 1 + \lambda_h - \lambda_{h+1}^2 - 4\lambda_h \lambda_{h+1} - \frac{3}{2} \lambda_h^2 \\
& = \lambda_h \left(3 - 4\lambda_{h+1} - \frac{5}{2} \lambda_h \right) = \lambda_h \left(\frac{1}{2} \lambda_h - \lambda_{h+1} \right).
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} = 2\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} + 2e \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} (\gamma^2 + 2e\gamma) = -B_i (\gamma^2 + 2e\gamma).$$

Dunque, se si definisce il prodotto

$$p = \lambda_h \lambda_{h+1} \tag{VI.34}$$

dei rapporti

$$\frac{m_0}{m_0 + m_1}, \quad \frac{m_1}{m_0 + m_1},$$

dove le m sono delle costanti molto vicine alle masse dei due corpi (VI.12), si ha

$$\begin{aligned} B_{h|i} \mathfrak{D}_h^{(n)} &= (-1)^{h+1} (\lambda_{h+1} + p) B_i (\beta^2 \gamma) \\ &+ (-1)^{h+1} p (\lambda_{h+1} - \tfrac{1}{2} \lambda_h) B_i (\gamma^2 + 2e\gamma). \end{aligned} \quad (\text{VI.35})$$

VI.2.7 Applicazione dell'operatore $B_{h|i}$ a $\mathfrak{D}_h^{(2)}$

Sarà utile fornire inizialmente un'espressione di $\dot{r}$ in funzione di γ e delle costanti di integrazione e ed a , dedotta dagli integrali delle forze vive e delle aree [(VI.24) e (VI.25)].

Ciò si ottiene notando che

$$\beta^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2.$$

Quindi

$$\dot{r}^2 = \beta^2 - r^2 \dot{\theta}^2 = \beta^2 - \left(\frac{\gamma}{a} \right)^2 = 2e + 2\gamma - \frac{\gamma^2}{a^2}. \quad (\text{VI.36})$$

Dopo di ciò, prima di tutto calcoliamo la derivata

$$\frac{\partial'^{(h)2} r}{\partial' x^{0^2}}.$$

Si ha, seguendo l'osservazione nella Sezione 1,

$$\frac{\partial'^{(h)} r}{\partial' x^0} = \sum_{j=1}^3 \frac{x_{h+1}^j - x_h^j}{r} \beta_{h+1}^j.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \frac{\partial'^{(h)2} r}{\partial' x^{0^2}} &= \sum_{j=1}^3 \frac{x_{h+1}^j - x_h^j}{r} \dot{\beta}_{h+1}^j + \frac{1}{r} \beta_{h+1}^2 \\ &\quad - \frac{1}{r^2} \frac{\partial'^{(h)} r}{\partial' x^0} \sum_{j=1}^3 (x_{h+1}^j - x_h^j) \beta_{h+1}^j \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{x_{h+1}^j - x_h^j}{r} \dot{\beta}_{h+1}^j + \frac{1}{r} \beta_{h+1}^2 \\ &\quad - \frac{1}{r} \sum_{k,j=1}^3 \frac{\partial r}{\partial x_{h+1}^k} \frac{\partial r}{\partial x_{h+1}^j} \beta_{h+1}^k \beta_{h+1}^j. \end{aligned} \quad (\text{VI.37})$$

Ora applicheremo l'operatore $B_{h|i}$ a $\mathfrak{D}_h^{(2)}$ notando che questa funzione non dipende dai $\beta_{h|i}$.

D'altro canto, se si esprimono i vari termini in funzione delle coordinate e della velocità di P_1 rispetto a P_0 , si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \frac{x_{h+1}^j - x_h^j}{r} \dot{\beta}_{h+1|j} &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{h+1} \frac{x_j}{r} (-1)^h \lambda_h \dot{\beta}_j = -\lambda_h \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{r} \dot{\beta}_j, \\ \frac{1}{r} \beta_{h+1}^2 &= \frac{\lambda_h^2}{r} \beta^2, \\ \sum_{k,j=1}^3 \frac{\partial r}{\partial x_{h+1}^k} \frac{\partial r}{\partial x_{h+1}^j} \beta_{h+1}^k \beta_{h+1}^j &= \lambda_h^2 \sum_{k,j=1}^3 \frac{\partial r}{\partial x^k} \frac{\partial r}{\partial x^j} \beta_k \beta_j = \lambda_h^2 \beta_2^2, \end{aligned}$$

dove β_r indica la velocità radiale (relativa) di P_1 , cioè, $\dot{r}$.

Quindi, si ha

$$\begin{aligned} B_{h|i} \mathfrak{D}_h^{(2)} &= -\frac{1}{2} l \lambda_{h+1} \frac{\partial}{\partial x_h^i} \frac{\partial'^{(h)2} r}{\partial' \chi^{02}} \\ &= -(-1)^{h+1} \frac{1}{2} l \lambda_{h+1} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ -\lambda_h \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{r} \dot{\beta}_j + \frac{\lambda_h^2}{r} \beta^2 - \frac{\lambda_h^2}{r} \beta_r^2 \right\} \\ &= -(-1)^{h+1} \frac{1}{2} l \lambda_{h+1} \left\{ -l \lambda_h \frac{\partial}{\partial x^i} \sum_{j=1}^3 \dot{\beta}_j \frac{\partial r}{\partial x^j} + \lambda_h^2 \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} - \lambda_h^2 \beta_r^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \right\} \\ &= -(-1)^{h+1} \frac{1}{2} l \lambda_{h+1} \left\{ -l \lambda_h \sum_{i,j=1}^3 \dot{\beta}_j \frac{\partial_r^2}{\partial x^i \partial x^j} + \lambda_h^2 \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} - \lambda_h^2 \beta_r^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \right\}. \end{aligned}$$

In virtù delle equazioni (VI.23), si ha

$$\sum_{i,j=1}^3 \dot{\beta}_j \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{l}{r^2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial r}{\partial x^j} \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{1}{2} \frac{l}{r^2} \frac{\partial}{\partial x^i} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial r}{\partial x^j} \right)^2 = 0.$$

A causa di (VI.36) si ottiene, dunque:

$$\begin{aligned} B_{h|i} \mathfrak{D}_h^{(2)} &= -(-1)^{h+1} \lambda_{h+1} \tag{VI.38} \\ &\quad \times \left\{ \lambda_h^2 (\gamma + e) \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} - \lambda_h^2 \left(e + \gamma - \frac{\gamma^2}{2a^2} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \right\} \\ &= -(-1)^{h+1} p \lambda_h \frac{1}{2a^2} \gamma^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \\ &= -(-1)^{h+1} p \lambda_h \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{6} \frac{\gamma^3}{a^2} \right) = (-1)^{h+1} p \lambda_h B_i \left(\frac{1}{6} \frac{\gamma^3}{a^2} \right). \end{aligned}$$

VI.2.8 Conclusione dei calcoli precedenti e deduzione della funzione di Lagrange che governa il moto relativo

Ecco dunque in definitiva il risultato dell'operatore lagrangiano applicato alla perturbazione $\mathfrak{D}_h$ espressa in termini dell'operatore del moto relativo

$$\begin{aligned}
 B_{h|i}\mathfrak{D}_h = & (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}^2(\lambda_{h+1} + 1)B_i\left(\frac{1}{2}\beta^2\gamma - e\gamma\right) \\
 & + (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}(\lambda_{h+1} + 1)B_i\left(-\frac{1}{2}\gamma^2\right) \\
 & + (-1)^{h+1}(\lambda_{h+1} + p)B_i(\beta^2\gamma) \\
 & + (-1)^{h+1}p\left(\lambda_{h+1} - \frac{1}{2}\lambda_h\right)B_i(\gamma^2 + 2e\gamma) \\
 & + (-1)^{h+1}p\lambda_h B_i\left(\frac{1}{6}\frac{\gamma^3}{a^2}\right).
 \end{aligned} \tag{VI.39}$$

Ora, può essere utile ricordare che, poiché

$$\lambda_0 + \lambda_1 = 1,$$

si ha

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1 - 2p, \quad \lambda_0^3 + \lambda_1^5 = 1 - 3p, \quad p = \lambda_0\lambda_1.$$

Per arrivare alla funzione lagrangiana $\mathfrak{L}$ del moto relativo, dobbiamo calcolare l'espressione

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{h+1}B_{h|i}\mathfrak{L}_h + (-1)^h B_{h+1|i}\mathfrak{L}_{h+1} \\
 & = (-1)^h \{B_{h+1|i}\mathfrak{L}_{h+1} - B_{h|i}\mathfrak{L}_h\} \\
 & = (-1)^h \{B_{h+1|i}\mathfrak{R}_{h+1} - B_{h|i}\mathfrak{R}_h\} \\
 & \quad + (-1)^h \{B_{h+1|i}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{R}_{h+1}^2\right) - B_{h|i}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{R}_h^2\right)\} \\
 & \quad + (-1)^h \{B_{h+1|i}(-\gamma_{h+1}^2 - \gamma_{h+1}\gamma_h^*) - B_{h|i}(-\gamma_h^2 - \gamma_h\gamma_{h+1}^*)\} \\
 & \quad + (-1)^h \{B_{h+1|i}\mathfrak{D}_{h+1}^{(1)} - B_{h|i}\mathfrak{D}_h^{(1)}\} \\
 & \quad + (-1)^h \{B_{h+1|i}\mathfrak{D}_{h+1}^{(2)} - B_{h|i}\mathfrak{D}_h^{(2)}\}.
 \end{aligned} \tag{VI.40}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
& (-1)^h \{B_{h+1|i} \mathfrak{R}_{h+1} - B_{h|i} \mathfrak{R}_h\} \\
&= (-1)^h \{(-1)^h \lambda_h B_i \mathfrak{R} + (-1)^h \lambda_{h+1} B_i \mathfrak{R}\} = B_i \mathfrak{R}, \\
& (-1)^h \{B_{h+1|i} (\tfrac{1}{2} \mathfrak{R}_{h+1}^2) - B_{h|i} (\tfrac{1}{2} \mathfrak{R}_h^2)\} \\
&= (-1)^h \{(-1)^h (\lambda_h^2 + \lambda_h^3) B_i (\tfrac{1}{2} \beta^2 \gamma - e\gamma) \\
&\quad + (-1)^h (\lambda_{h+1}^2 + \lambda_{h+1}^3) B_i (\tfrac{1}{2} \beta^2 \gamma - e\gamma)\} \\
&= (1 - \tfrac{5}{2} p) B_i (\beta^2 \gamma - 2e\gamma), \\
& (-1)^h \{B_{h+1|i} (-\gamma_{h+1}^2 - \gamma_{h+1} \gamma_h^*) - B_{h|i} (-\gamma_h^2 - \gamma_h \gamma_{h+1}^*)\} \\
&= (-1)^h \{(-1)^h (\lambda_h + \lambda_h^2) B_i (-\tfrac{1}{2} \gamma^2) \\
&\quad + (-1)^h (\lambda_{h+1} + \lambda_{h+1}^2) B_i (-\tfrac{1}{2} \gamma^2)\} = B_i [(p-1) \gamma^2], \\
& (-1)^h \{B_{h+1|i} \mathfrak{D}_{h+1}^{(1)} - B_{h|i} \mathfrak{D}_h^{(1)}\} \\
&= (-1)^h \{(-1)^h (\lambda_h + p) B_i (\beta^2 \gamma) + (-1)^h p (\lambda_h - \tfrac{1}{2} \lambda_{h+1}) B_i (\gamma^2 + 2e\gamma) \\
&\quad + (-1)^h (\lambda_{h+1} + p) B_i (\beta^2 \gamma) \\
&\quad + (-1)^h p (\lambda_{h+1} - \tfrac{1}{2} \lambda_h) B_i (\gamma^2 + 2e\gamma)\} \\
&= B_i [(1+2p) \beta^2 \gamma + \tfrac{1}{2} p (\gamma^2 + 2e\gamma)], \\
& (-1)^h \{B_{h+1|i} \mathfrak{D}_{h+1}^{(2)} - B_{h|i} \mathfrak{D}_h^{(2)}\} \\
&= (-1)^h \left\{ (-1)^{h+1} p \lambda_{h+1} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{6} \frac{\gamma^3}{a^2} \right) - (-1)^h p \lambda_h \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{6} \frac{\gamma^3}{a^2} \right) \right\} \\
&= -p \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{6} \frac{\gamma^3}{a^2} \right) = B_i \left(\frac{1}{6} p \frac{\gamma^3}{a^2} \right).
\end{aligned}$$

I calcoli precedenti forniscono la funzione di Lagrange

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{R} + \mathfrak{D}, \quad (\text{VI.41})$$

dove

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} \beta^2 + \gamma \quad (\text{VI.28})$$

e

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} (4-p) \beta^2 \gamma + 6e \left(p - \frac{1}{2} \right) \gamma + \left(\frac{3}{2} p - 1 \right) \gamma^2 + \frac{1}{6} \frac{p}{a^2} \gamma^3, \quad (\text{VI.42})$$

per il moto del corpo P_1 relativo a P_0 .

Oppure può essere ancora scritto nella forma

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \Phi \beta^2 + \psi, \quad (\text{VI.43})$$

dove Φ e ψ indicano le funzioni

$$\Phi = 1 + (4 - p)\gamma, \quad (\text{VI.44})$$

$$\psi = \gamma + 6e\left(p - \frac{1}{3}\right)\gamma + \left(\frac{3}{2}p - 1\right)\gamma^2 + \frac{1}{6}\frac{p}{a^2}\gamma^3. \quad (\text{VI.45})$$

VI.2.9 Un teorema di equivalenza

Il nostro problema lagrangiano ammette l'integrale dell'energia

$$\frac{1}{2}\Phi\beta^2 - \psi = e, \quad (\text{VI.46})$$

dove la costante differisce da quella dell'energia del moto kepleriano approssimato di una quantità di un ordine superiore al primo (nella nostra approssimazione è permesso sostituirla con quest'ultima).

Secondo un ben noto teorema della Meccanica Analitica³, un fascio di traiettorie del problema suddetto dei due corpi, corrispondente a un valore determinato della costante e , è dato dalle geodetiche

$$ds^2 = 2\Phi(\psi + e)d\ell_0^2, \quad (\text{VI.47})$$

indicando con $d\ell_0$ l'elemento lineare dello spazio euclideo.

Può essere pensato come un fascio di traiettorie di energia nulla in un moto nello spazio ordinario dove il potenziale delle forze è

$$F = \Phi(\psi + e) = \left\{1 + (4 - p)\gamma\right\} \times \left[\left(e + \gamma + 6e\left(p - \frac{1}{3}\right)\gamma + \left(\frac{3}{2}p - 1\right)\gamma^2 + \frac{1}{6}\frac{p}{a^2}\gamma^3\right)\right], \quad (\text{VI.48})$$

uguale ancora, eccetto per quantità di ordine superiore, a

$$F = e + \gamma + \left(3 + \frac{1}{2}p\right)\gamma^2 + \frac{1}{6}\frac{p}{a^2}\gamma^3. \quad (\text{VI.48}')$$

Questo problema ausiliario ammette i due integrali delle forze vive (con costante nulla) e delle aree che si scrivono

$$\beta^2 = 2F, \quad (\text{VI.49})$$

³T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II₂, capitolo X, Bologna, Zanichelli, 1927.

cioè

$$\dot{r}'^2 + r^2 \dot{\theta}'^2 = 2F \quad (\text{VI.49'})$$

e

$$r^2 \dot{\theta}' = \frac{l}{a}. \quad (\text{VI.25'})$$

Eliminando il tempo römeriano, otteniamo

$$\gamma^2 + \left(\frac{d\gamma}{d\theta} \right)^2 = 2a^2 F, \quad (\text{VI.50})$$

da cui, come risultato finale,

$$\left(\frac{d\gamma}{d\theta} \right)^2 = 2a^2 e + 2a^2 \gamma - \gamma^2 + 2a^2 \left(3 + \frac{1}{2}p \right) \gamma^2 + \frac{1}{3}p\gamma^3. \quad (\text{VI.50'})$$

Questa equazione si presenta nella forma

$$\left(\frac{d\gamma}{d\theta} \right)^2 = f(\gamma) + g(\gamma), \quad (\text{VI.51})$$

indicando con

$$f(\gamma) = -\gamma^2 + 2a^2 \gamma + 2a^2 e \quad (\text{VI.52})$$

la funzione quadratica che si avrebbe nel moto kepleriano, che   , come abbiamo visto, del secondo ordine nella nostra notazione, e con

$$g(\gamma) = 2a^2 \left(3 + \frac{1}{2}p \right) \gamma^2 + \frac{1}{3}p\gamma^3 \quad (\text{VI.53})$$

il termine dovuto alla correzione einsteiniana (che    del terzo ordine). A questo punto    opportuno aggiungere una proposizione generale sul calcolo dei periodi.

VI.2.10 Digressione sul calcolo del periodo di una soluzione dell'equazione differenziale di Weierstrass

$$\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = \mathfrak{F}(q). \quad (\text{VI.54})$$

   ben noto grazie a Weierstrass, che se la funzione $\mathfrak{F}(q)$    continua entro l'intervallo $a \leq q \leq b$ dove    positiva e si annulla semplicemente solo per

$q = a$, $q = b$, $q(t)$ è una funzione periodica di t , a patto che il suo valore iniziale sia incluso tra a e b , e il periodo è dato da

$$\tau = 2 \int_a^b \frac{dq}{\sqrt{\mathfrak{F}(q)}}. \quad (\text{VI.55})$$

Nel caso elementare

$$\mathfrak{F}(q) = \omega^2 (q - a)(b - q), \quad (\text{VI.56})$$

si ha, come risultato, il periodo

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (\text{VI.57})$$

Ora, per il nostro obiettivo è interessante considerare la funzione

$$\mathfrak{F}(q) = \omega^2 (q - a)(b - q) + g(q) \quad (\text{VI.58})$$

trattando $g(q)$ come fosse di ordine superiore rispetto al primo termine in tutto l'intervallo tra a, b , e, naturalmente, come fosse una funzione continua nell'intervallo a', b' che contiene al suo interno l'intervallo a, b .

In questo caso, si può dare, seguendo Levi-Civita⁴, un'espressione notevole del periodo attraverso la formula seguente:

$$\tau = \tau_0 + \frac{1}{\omega^3} \int_0^\pi \frac{G(q, a, b)}{\mathfrak{B}(q, a, b)} d\theta, \quad (\text{VI.59})$$

dove le variabili g e θ sono legate dalla relazione

$$q = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b) \cos \theta \quad (\text{VI.60})$$

e

$$G(q, a, b) = \begin{vmatrix} g(q) & q & 1 \\ g(a) & a & 1 \\ g(b) & b & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{B}(q, a, b) = (b - a)(q - a)(b - q). \quad (\text{VI.61})$$

Questa formula (dove la funzione sotto segno di integrazione ha l'aspetto di $\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$ negli estremi dell'intervallo di integrazione) può essere trasformata⁵ in una

⁴Sul calcolo effettivo del periodo in un caso tipico di prima approssimazione, *Revista de Ciencias*, p. 421, Lima (Perù), 1937.

⁵Cartovich, *Sul calcolo effettivo del periodo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione*, *Rend. Lincei*, 1938. Una notevole espressione del resto in queste formule è stata recentemente sviluppata da Sansone. Vedere la sua Nota.

forma più utile per i calcoli.

Precisamente, abbiamo

$$\tau = \tau_0 + \frac{1}{\omega^3} \int_0^\pi g''(q) \sin^2 \theta \, d\theta, \quad (\text{VI.62})$$

assumendo, ovviamente, che $g(q)$ possieda una derivata seconda integrabile. Questa è la forma in cui applicheremo la formula qui di seguito.

VI.2.11 Precessione del perielio nel caso di due masse finite. Termine addizionale nella formula di Einstein per la precessione del perielio

Per molto tempo le osservazioni hanno indicato un piccolo spostamento nel perielio di alcuni pianeti, specialmente di Mercurio, nel piano dell'orbita e nella direzione del moto, che non si poteva spiegare con la teoria classica delle perturbazioni planetarie. Secondo Leverrier e le sue valutazioni successive più autorevoli, questo spostamento residuo, ancora sconosciuto, poteva essere stimato di $42''$ per secolo.

Einstein per primo ha riconosciuto che la precessione del perielio di ogni pianeta attorno al Sole appariva essere una conseguenza matematica della sua nuova legge di gravitazione, che fornisce quasi esattamente per questo spostamento il valore osservato. Tuttavia la sua analisi è valida solo nel caso di un corpo di massa trascurabile che gravita nel campo di un corpo (sferico) di massa finita. La nostra teoria ci conduce a perfezionare questo risultato fondamentale, nell'ordine di approssimazione considerato, in modo da essere valido per corpi di massa comparabile e verificabile dalle osservazioni astronomiche di stelle binarie dopo un grande numero di periodi.

Dimostreremo che la precessione del perielio può essere aumentata al massimo di $1/12$ del valore dato da Einstein.

Per l'applicazione della formula (VI.62) che abbiamo visto, conviene ricordare che l'espressione classica di γ in funzione di θ , cioè, nel moto kepleriano, è

$$\gamma = \frac{l}{r} = \frac{l}{p} + \frac{el}{p} \cos \theta, \quad (\text{VI.63})$$

dove p indica il parametro dell'ellisse kepleriana ed e la sua eccentricità.

Il periodo rispetto all'anomalia (vera) θ è

$$\tau_0 = 2\pi.$$

In questo caso di moto perturbato, si ha

$$g''(\gamma) = 4a^2 \left(3 + \frac{1}{2}p \right) + 2p\gamma,$$

come risulta dalla doppia derivazione della funzione $g(\gamma)$ (VI.53).
Dunque

$$g''(\gamma) \sin^2 \theta = 4a^2 \left(1 + \frac{1}{2}p \right) \sin^2 \theta + 2p \left(\frac{l}{p} + \frac{el}{p} \cos \theta \right) \sin^2 \theta.$$

Integrando nell'intervallo $0, \pi$, e notando che

$$a^2 = \frac{l}{p},$$

troviamo, applicando la formula (VI.62)

$$\tau = 2\pi + \sigma, \quad (\text{VI.64})$$

$$\sigma = \sigma_e \left(1 + \frac{p}{3} \right), \quad (\text{VI.65})$$

dove abbiamo indicato con

$$\sigma_e = 6\pi a^2 = 6\pi \frac{l}{p} \quad (\text{VI.66})$$

la precessione nel perielio scoperta da Einstein.

Ricordando che $p = \lambda_0 \lambda_1$ e che $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, si ha che il valore massimo di $\frac{1}{3}p$ è $\frac{1}{12}$, che prova il risultato annunciato.

VI.2.12 Il periodo apsidale e la rotazione siderale

Nelle sezioni precedenti abbiamo (nell'approssimazione adottata) risolto il problema dei due corpi in due passi:

1. determinazione della traiettoria;
2. legge oraria.

Il risultato del primo passo ci ha condotti a riconoscere la natura spiraliforme dell'orbita assimilabile praticamente con un'ellisse che ruota lentamente, con l'importante caratteristica geometrica consistente nella leggera precessione del perielio, rigorosamente costante, persino entro la seconda approssimazione.

In questa approssimazione, la legge oraria può essere ridotta al calcolo del periodo apsidale, ovvero, dell'intervallo costante di tempo T che intercorre tra due passaggi consecutivi di uno (qualunque) dei corpi da un perielio all'altro. Se, comunque, teniamo in considerazione il fatto che la distanza r dei due corpi è una funzione esattamente periodica dell'anomalia vera θ , avente periodo

$$\tau = 2\pi + \sigma,$$

dove σ indica la precessione del perielio, cioè, il doppio dell'angolo apsidale, e se consideriamo che secondo la formula (VI.25') (integrale delle aree) θ è una funzione periodica di x^0 , c'è ragione di portare l'attenzione sulla durata di una rivoluzione siderale, ovvero, sul tempo (ugualmente costante nei limiti della nostra approssimazione) impiegato dal corpo per riprendere la stessa orientazione nello spazio.

Per determinare la relazione tra il periodo siderale T e il periodo apsidale T_k , prendiamo come punto iniziale l'integrale primo

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \theta} = \text{cost.} \quad (\text{VI.67})$$

dedotto dalla funzione

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \Phi \beta^2 + \psi,$$

grazie alla ciclicità della variabile θ .

Bisogna osservare ora che possiamo sostituire la costante con α , che differisce da essa di una quantità di ordine superiore, e si ha

$$\Phi r^2 \frac{d\theta}{dx^0} = \frac{l}{\alpha}, \quad (\text{VI.67}')$$

da cui si deduce che

$$dt = \frac{\alpha}{lc} (1 + 4\gamma) r^2 d\theta. \quad (\text{VI.68})$$

Estendendo l'integrazione ad un periodo di θ otteniamo

$$T = \frac{\alpha}{lc} \int_0^{2\pi+\sigma} (1 + 4\gamma) r^2 d\theta = T_k + \frac{\alpha}{lc} \sigma (r^2)_{\theta=0} + \frac{4\alpha}{lc} \int_0^{2\pi} \gamma r^2 d\theta, \quad (\text{VI.69})$$

dove

$$T_k = \frac{n}{2\pi} \quad (\text{VI.70})$$

è il periodo siderale.

Come sappiamo, si ha

$$r_{\theta=0} = \alpha(1 - e). \quad (\text{VI.71})$$

Inoltre, in virtù dell'equazione di Kepler, si ha

$$n \, dt = (1 - e \cos u) \, du, \quad (\text{VI.72})$$

e quindi

$$\frac{4a}{lc} \int_0^{2\pi} \gamma r^2 d\theta = \frac{4}{n} \int_0^{T_k} \gamma n \, dt = \frac{4}{n} \frac{l}{r} \frac{r}{a} \int_0^{2\pi} du = \frac{8\pi l}{an}.$$

Dunque

$$T = T_k + \frac{8\pi l}{an} + \frac{\sigma}{C} a^2 (1 - e)^2. \quad (\text{VI.73})$$

Trasformiamo ora l'ultimo termine, ricordando che

$$\frac{a^2}{C} = \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}. \quad (\text{VI.74})$$

Si ha

$$\sigma \frac{(1-e)^2}{n\sqrt{1-e^2}} = 6\pi l \left(1 + \frac{1}{3}p\right) \frac{(1-e)^2}{an(1-e^2)\sqrt{1-e^2}} = T_k \frac{3l}{a} \left(1 + \frac{1}{3}p\right) \frac{(1-e)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Infine

$$T = T_k(1 + b), \quad (\text{VI.75})$$

avendo posto

$$b = \frac{l}{a} \left[4 + 3 \left(1 + \frac{1}{3}p\right) \frac{\sqrt{1-e}}{(1-e)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (\text{VI.76})$$

una piccola quantità numerica definita in funzione degli elementi a , e dell'orbita osculatrice kepleriana, essendo l il raggio gravitazionale e p il prodotto $\lambda_0 \lambda_1$.

VI.3 Il moto del centro di gravità

VI.3.1 L'accelerazione del centro di gravità in seconda approssimazione

Se si ricorda che

$$\lambda_h = \frac{m_h}{m} \quad (h = 0, 1),$$

e indicando con w la velocità assoluta del centro di gravità, si ha

$$\dot{w}_i = \lambda_h \dot{\beta}_{h|i} + \lambda_{h+1} \dot{\beta}_{h+1|i}. \quad (\text{VI.77})$$

Come abbiamo già osservato altre volte, il secondo membro è nullo nell'approssimazione newtoniana. Per valutare la correzione einsteiniana, è ovviamente sufficiente proseguire ulteriormente i calcoli, tenendo in considerazione i termini dell'ordine immediatamente superiore. Secondo le nostre equazioni relativistiche (Sezione 1.2) del moto assoluto dei due corpi, si ha per prima cosa

$$\begin{aligned}\dot{w}_i &= B_{h|i}(\lambda_h \mathfrak{R}_h) + B_{h+1|i}(\lambda_{h+1} \mathfrak{R}_{h+1}) \\ &= -\lambda_h B_{i|h} \mathfrak{D}_h - \lambda_{h+1} B_{h+1|i} \mathfrak{D}_{h+1}.\end{aligned}\quad (\text{VI.78})$$

Ora poniamo

$$\delta = (-1)^h (\lambda_h - \lambda_{h+1}) = \lambda_0 - \lambda_1 \quad (\text{VI.79})$$

e utilizziamo le espressioni calcolate per gli operatori lagrangiani (Sezione 2.4 e 2.7).

Troviamo

$$\begin{aligned}\dot{w}_i &= (-1)^h p(\lambda_{h+1}^2 + \lambda_{h+1}) B_i(\tfrac{1}{2} \gamma \beta^2 - e\gamma) \\ &\quad + (-1)^{h+1} p(\lambda_h^2 + \lambda_h) B_i(\tfrac{1}{2} \gamma \beta^2 - e\gamma) \\ &\quad + (-1)^h p(1 + \lambda_{h+1}) B_i(-\tfrac{1}{2} \gamma^2) \\ &\quad + (-1)^{h+1} p(1 + \lambda_h) B_i(-\tfrac{1}{2} \gamma^2) + (-1)^h (1 + \lambda_h) B_i(\beta^2 \gamma) \\ &\quad + (-1)^h p(p - \tfrac{1}{2} \lambda_h^2) B_i(\gamma^2 + 2e\gamma) + (-1)^{h+1} p(1 + \lambda_{h+1}) B_i(\beta^2 \gamma) \\ &\quad + (-1)^{h+1} p(p - \tfrac{1}{2} \lambda_{h+1}^2) B_i(\gamma^2 + 2e\gamma) + (-1)^h B_i\left(\tfrac{1}{6} \frac{\gamma^3}{a^2}\right) \\ &\quad + (-1)^{h+1} p B_i\left(\tfrac{1}{6} \frac{\gamma^3}{a^2}\right) \\ &= -2p\delta B_i(\tfrac{1}{2} \beta^2 \gamma - e\gamma) - p\delta B_i(-\tfrac{1}{2} \gamma^2) \\ &\quad + p\delta B_i(\beta^2 \gamma) - \tfrac{1}{2} p\delta B_i(\gamma^2 + 2e) \\ &= p\delta B_i(e\gamma) = -ep\delta \frac{\partial \gamma}{\partial x^i}.\end{aligned}\quad (\text{VI.80})$$

VI.3.2 Assenza di un termine secolare

Ora abbiamo

$$\frac{d\theta}{dx^0} = \frac{l}{a} \frac{1}{r^2},$$

dunque

$$\dot{w}_i = \frac{dw_i}{d\theta} \frac{d\theta}{dx^0} = \frac{l}{a} \frac{1}{r^2} \frac{dw_i}{d\theta} = -ep\delta l \frac{\delta \frac{1}{r}}{\partial x^i} \quad (\text{VI.81})$$

e di conseguenza

$$\frac{dw_i}{d\theta} = eap\delta \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{VI.82})$$

cioè

$$\frac{dw_1}{d\theta} = h \cos \theta, \quad \frac{dw_2}{d\theta} = h \sin \theta, \quad \frac{dw_3}{d\theta} = 0, \quad (\text{VI.83})$$

avendo posto

$$h = eap\delta. \quad (\text{VI.84})$$

Concludiamo che l'accelerazione del centro di gravità appartiene sempre al piano delle orbite e dipende periodicamente da θ , che, a sua volta, è una funzione periodica del tempo, il che implica l'assenza del termine secolare: risultato in accordo con le conclusioni che sono state stabilite in modi differenti, da un lato da Robertson, seguendo una nuova costruzione teorica di Einstein, e dall'altro da Eddington e Clark.

VI.3.3 Estensione dell'artificio della Sezione 1 che dà rilievo al principio di eliminazione nel problema degli n -corpi

Abbiamo stabilito (Capitolo V, Sezione 4.6) che è possibile, con una leggera modifica delle costanti λ che caratterizzano le masse, nella nostra approssimazione, ridurre il problema relativistico di molti corpi gravitanti a quello del moto di punti materiali, regolato da un'opportuna funzione di Lagrange.

In altre parole, si può trovare un'effettiva espressione di ciò che, come affermato precedentemente, Brillouin ha chiamato il principio di eliminazione, secondo il quale, anche in Meccanica Relativistica, ogni cosa avviene come se ogni corpo del sistema non esercitasse nessuna influenza sul moto del suo centro di gravità, sotto certe condizioni da caratterizzare.

Abbiamo dimostrato che questo è possibile nel caso di due corpi, caso che è stato sviluppato nel Capitolo VI.

Ora ci proponiamo di dimostrare che il principio di eliminazione può essere realizzato in generale attraverso lo stesso artificio impiegato nel problema dei due corpi.

Per ogni corpo C_h si introduce una costante σ_h del primo ordine. La funzione

$$(1 + \sigma_h)\mathfrak{L}_h$$

che si riduce a

$$(1 + \sigma_h)\mathfrak{R}_h + \mathfrak{D}'_h + \mathfrak{D}''_h,$$

eccetto per i termini di ordine superiore, dà luogo alle stesse equazioni di quelle del nostro problema.

Si possono determinare (e in questa possibilità consiste l'importanza dell'artificio) le costanti σ_h in modo tale che le $2n$ costanti $\bar{\omega}_h, \chi_h$, che dipendono dall'estensione e dalla struttura dei corpi, similmente non appaiano nelle equazioni differenziali del moto.

Per vederlo, basta solo considerare l'espressione

$$(1 + \sigma_h)\mathfrak{R}_p + \mathfrak{D}_h'',$$

essendo $\mathfrak{D}_h'$ indipendente dalle suddette costanti.

Grazie alle nostre ipotesi, si può sostituire

$$\frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_h'$$

al posto di $\mathfrak{R}_h$, che ne differisce per una costante additiva. Poi, se consideriamo le espressioni di γ_h' e di $\mathfrak{D}_h''$, si ha

$$\begin{aligned} (1 + \sigma_h)\mathfrak{R}_h + \mathfrak{D}_h'' &= \frac{1}{2}\beta_h^2 + \frac{1}{2}\sigma_h\beta_h^2 + l(1 + \sigma_h) \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v}{r(P_v, P_h)} \\ &\quad - l \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v(\chi_v + 2\bar{\omega}_h)}{r(P_v, P_h)} - \bar{\omega}_h\beta_h^2 \\ &= \frac{1}{2}\beta_h^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma_h - \bar{\omega}_h\right)\beta_h^2 + l \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v(1 - \chi_v) + \lambda_v(\sigma_h - 2\bar{\omega}_h)}{r(P_v, P_h)}. \end{aligned}$$

Ovviamente è sufficiente porre

$$\sigma_h = 2\bar{\omega}_h \quad (h = 0, 1, \dots, n-1)$$

per ottenere

$$(1 + \sigma_h)\mathfrak{R}_h + \mathfrak{D}_h'' = \frac{1}{2}\beta_h^2 + l \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v'}{r(P_v, P_h)},$$

con

$$\lambda_v' = \lambda_v(1 - \chi_v) \quad (v = 0, 1, \dots, n-1).$$

Come sappiamo, le costanti $\bar{\omega}_h, \chi_h$ sono senza dubbio del primo ordine; invece i termini di $\mathfrak{D}_h'$ sono tutti di ordine superiore, il che ci permette di sostituire i

λ con λ' . Dopodiché l'apice ' può essere eliminato completamente. Pertanto, arriviamo a questo risultato fondamentale:

Nel problema relativistico di molti (diciamo n) corpi gravitanti, possiamo far dipendere il moto di ogni corpo P_h del sistema da una funzione di Lagrange $\bar{\mathfrak{L}}_h$ ($h = 0, 1, \dots, n-1$) che ha la struttura seguente:

$$\bar{\mathfrak{L}}_h = \mathfrak{R}_h + \mathfrak{D}_h,$$

dove

$$\mathfrak{R}_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_h,$$

$$\gamma_h = l \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v}{r(P_v, P_h)};$$

$$\mathfrak{D}_h = \frac{1}{2}\mathfrak{R}_h^2 - \gamma_h^2 + \zeta_h + \gamma_h \beta_h^2 - 4 \sum_i \gamma_{h|i} \beta_{h|i},$$

$$\zeta_h = \varphi_h + \psi_h + v_h,$$

$$\varphi_h = -l^2 \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v}{r(P_v, P_h)} \sum_{\substack{\rho=0, \\ \rho \neq v}}^{n-1} \frac{\lambda_\rho}{r(P_v, P_\rho)},$$

$$\psi_h = \frac{3}{2}l \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v \beta_v^2}{r(P_v, P_h)},$$

$$v_h = \frac{1}{2}l \frac{\partial^2}{\partial \chi^{02}} \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \lambda_v r(P_v, P_h),$$

$$-\gamma_{h|i} = l \sum_{\substack{v=0, \\ v \neq h}}^{n-1} \frac{\lambda_v \beta_{h|i}}{r(P_v, P_h)},$$

l'estensione e la struttura dei corpi non intervengono se non attraverso i parametri λ , che differiscono molto poco dalle masse (comparate alla massa totale del sistema, cosicché $\sum_{h=0}^{n-1} \lambda_h = 1$).

Questa riproposizione in italiano dell'ultimo lavoro di Tullio Levi-Civita (1873- 1941) nasce da una esigenza culturale forte. Nel 2018 Padova e la sua Università hanno celebrato il loro grande scienziato con un importante convegno, accompagnato dalla ristampa di una selezione di suoi lavori, comprendente la sua tesi di laurea autografa. L'ultimo suo lavoro scientifico, *"Le problème des n corps en relativité générale"*, fu redatto in francese, e per le note vicende risalenti all'abominia fascista delle leggi razziali, fu stampato solo postumo, nel 1950, a cura dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

O P

C

