Rizomi

Tullio Levi-Civita

ALLA SOGLIA DELLA NUOVA MECCANICA

Quattro saggi tra divulgazione e fisica matematica

PADOVA UP
PADOVA UNIVERSITY PRESS

La vita mi ha sempre fatto pensare a una pianta che vive del suo rizoma: la sua vera vita è invisibile, nascosta nel rizoma.

(C.G. Jung)

Rizomi rimette in circolazione lavori seminali di alcune tra le più significative voci dell'Ateneo patavino. In contesti nuovi e in continua mutazione, questi testi fondamentali aprono la strada a inattese e inesplorate costellazioni culturali.

Alla soglia della nuova meccanica.
Quattro saggi tra divulgazione e fisica matematica

In copertina: Jannis Kounellis, *Resistenza e Liberazione* (particolare), Cortile interno del Palazzo del Bo, Padova

Con il contributo dell'Università degli Studi di Padova tramite il Bando per i Progetti di Terza Missione, anno 2023.

Prima edizione 2024, Padova University Press

ISBN 9788869384004

Università degli Studi di Padova
via 8 Febbraio 2, Padova
www.padovauniversitypress.it

Tullio Levi-Civita

Alla soglia della nuova meccanica. Quattro saggi tra divulgazione e fisica matematica

Con introduzione di Franco Cardin e Rossana Tazzioli

PADOVA UP

Indice

Tullio Levi-Civita divulgatore

Franco Cardin [1] Rossana Tazzioli [2]

In ogni epoca bisogna cercare
di strappare la tradizione al conformismo
che è in procinto di sopraffarla.

Walter Benjamin,
Tesi di filosofia della storia, Tesi VI, 1940

I quattro lavori che presentiamo coprono un periodo di tempo piuttosto ampio, dal 1918 al 1936, e riguardano aspetti diversi della teoria della relatività.

Il primo in ordine di tempo, "La teoria di Einstein e il principio di Fermat" [23], è stato pubblicato nel 1918 sul giornale della Società Italiana dei Fisici «Il Nuovo Cimento». Lo scopo di questo lavoro è quello di stabilire l'equivalenza, nel caso stazionario[3], di due principi fondamentali per la propagazione luminosa. In altre parole, si dimostra che il principio del minimo tempo, detto di Fermat, legato all'elettromagnetismo Maxwelliano nell'approssimazione[4] dell'ottica geometrica, è equivalente ad affermare che i raggi luminosi sono proprio geodetiche di lunghezza nulla della metrica dello spazio-tempo. Levi-Civita cita quest'ultima osservazione come 'postulato di Hilbert' dell'ottica

[1]Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita, Università di Padova, Italia.
[2]Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille, France.
[3]Il significato di metrica spazio-temporale stazionaria sarà ripreso nella Piccola Appendice, sez. 4.1.
[4]Onde monocromatiche ad alta frequenza.

geometrica nella teoria di Einstein. Il fatto che i due principi, di Fermat e Hilbert, siano equivalenti nelle metriche stazionarie della relatività generale, dovrebbe, nelle intenzioni di Levi-Civita, mostrare come la nuova teoria sia in sintonia con la fisica pre-relativistica e dunque promuoverne l'accettazione.

Il famoso articolo "Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova meccanica" [24] è il testo di una conferenza tenuta al Seminario Matematico dell'Università di Roma durante l'anno accademico 1918/19 e immediatamente tradotta in spagnolo e in francese. Tale articolo ha un sapore chiaramente divulgativo sebbene la sua lettura nasconda diverse insidie tecniche (si veda qui sotto la Piccola Appendice). Lo scopo, ancora una volta, è quello di promuovere la teoria della relatività presso i colleghi matematici ma anche presso i fisici e gli astronomi che si ritrovavano al Seminario romano per assistere alla conferenza.

L'articolo "L'ottica geometrica e la relatività generale di Einstein", pubblicato nella «Rivista d'ottica e meccanica di precisione» [25] del 1920 intende presentare ai 'tecnici', cultori di ottica e lettori del giornale, alcuni aspetti di ottica geometrica alla luce della nuova teoria della relatività generale. Essi saranno ripresi in una delle lezioni tenute a Barcellona e raccolte nel volume *Questioni di meccanica classica e relativistica* pubblicato nel 1922 [27].

Si tratta di mostrare come un valore numerico per la deflessione dei raggi luminosi sia deducibile già dalle formule della meccanica newtoniana. Tuttavia, è necessaria la relatività generale per ottenere il corretto angolo di deflessione, che risulta il doppio rispetto a quello dedotto dall'ottica geometrica classica.

L'ultimo articolo che presentiamo concerne la relatività ristretta ed è pubblicato ancora su «Il Nuovo Cimento» nel 1936 [29]. Questo è l'unico articolo che concerne la relatività ristretta e ha ancora un intento divulgativo. Levi-Civita cerca di presentare ai fisici aspetti noti sotto una forma semplificata e più intuitiva.

Questa introduzione vuole offrire al lettore il contesto storico e scientifico che gli consenta di apprezzare meglio gli scritti di Tullio Levi-Civita sulla relatività e l'ottica geometrica riprodotti in questo libro.

Dopo aver brevemente introdotto la carriera scientifica e istituzionale di Levi-Civita nel primo paragrafo, mettiamo in evidenza il suo contributo alla teoria della relatività. Infine, delineiamo i tratti essenziali della sua attività come divulgatore scientifico. L'introduzione è completata da un'Appendice tecnica allo scopo di accompagnare la lettura dei suoi scritti, che altrimenti risulterebbe di difficile comprensione ai lettori di oggi.

1 Una carriera brillante

Tullio Levi-Civita nasce a Padova il 29 marzo 1873 da un'agiata famiglia. La madre, Bice Lattes, è una donna colta e di buona famiglia, il padre Giacomo è avvocato e uomo del Risorgimento, con un passato di combattente in Aspromonte al fianco di Garibaldi.

Dopo il liceo, Tullio si iscrive all'Università dove frequenta i corsi di Giuseppe Veronese (1854–1917) e Gregorio Ricci Curbastro (1853–1925). Si laurea nel 1892 con una tesi sulla teoria degli invarianti svolta sotto la direzione di Ricci Curbastro. Già nel 1897, Levi-Civita vince la cattedra di Meccanica razionale all'Università di Padova, dove resterà fino alla fine del 1918.

A Padova, Levi-Civita intraprende importanti ricerche che ruotano intorno a quattro argomenti fondamentali: il calcolo tensoriale, l'idrodinamica, il problema di tre corpi e la teoria della relatività generale. Il calcolo tensoriale diventa nelle mani di Levi-Civita lo strumento essenziale per indagare gli aspetti geometrici delle varietà riemanniane, ma anche per sviluppare nuovi punti di vista in meccanica analitica e in teoria del potenziale[5]. A tutte queste discipline Levi-Civita dà contributi fondamentali.

Levi-Civita diventa ben presto un punto di riferimento per l'Università di Padova, dove forma numerosi allievi in diverse discipline matematiche e fisiche. Ne citiamo alcuni: Angelo Tonolo (1885–1962) (geometria differenziale), Umberto Cisotti (1882–1946) (idrodinamica), Attilio Palatini (1889–1949) (relatività).

Nel 1909, Levi-Civita riceve una proposta di Guido Castelnuovo (1865–1952), professore di geometria a Roma, cui si associa Vito Volterra (1860–1940), per trasferirsi all'Università di Roma come successore di Valentino Cerruti (1850–1909)[6]. Nonostante l'onore e il riconoscimento che accom-

[5]Per una biografia scientifica divulgativa su Tullio Levi-Civita si veda [46]. Una breve analisi della sua opera scientifica è in [45]. Un esame approfondito dell'opera di Levi-Civita, in particolare del suo contributo al calcolo tensoriale e alla relatività generale si trova nel libro [52].

[6]La lettera di Castelnuovo a Levi-Civita è datata 24 agosto 1909 e pubblicata in ([43], p. 260).

pagnano una cattedra all'ateneo romano, Levi-Civita non accetta l'offerta, adducendo l'impossibilità di interrompere la sua vita familiare a Padova.

Alla fine del 1918, tuttavia, Levi-Civita e la moglie lasciano Padova per trasferirsi a Roma. Una decisione dovuta a diversi motivi. In primo luogo, nel 1914 Levi-Civita si è sposato con Libera Trevisani (1890–1973), una sua ex allieva, e questo significativo cambiamento nella sua vita personale ha giocato probabilmente un ruolo nelle sue scelte di vita. In secondo luogo, dopo la sconfitta dell'esercito italiano a Caporetto nel 1917, Levi-Civita ha vissuto temporaneamente a Roma. Questo breve soggiorno nella capitale potrebbe avergli fatto intravedere un'attività scientifica più ricca e interessante di quella cui avrebbe potuto aspirare a Padova.

Levi-Civita prende dunque servizio il 1° gennaio 1919 all'Università di Roma dove ricopre la cattedra di Analisi superiore. La sua carriera continua a essere folgorante. A Roma, oltre alla pubblicazione di numerosi trattati universitari, sviluppa e amplia le ricerche intraprese a Padova. Insieme ai nuovi colleghi, quali Guido Castelnuovo, Federigo Enriques (1871–1946), Francesco Severi (1879–1961) e Vito Volterra, si adopera per fare dell'Università di Roma un centro matematico internazionale capace di attirare brillanti studenti di dottorato, borsisti, post-dottorandi che vengono a Roma per formarsi e completare i loro studi.

In particolare, le ricerche di Levi-Civita sulla teoria della relatività di Einstein e i suoi contributi alla geometria differenziale attirano l'attenzione di colleghi stranieri che incoraggiano i loro studenti a trascorrere un periodo di studio a Roma per collaborare con Levi-Civita. I suoi trattati svolgono un ruolo cruciale nel diffondere le sue scoperte sul calcolo tensoriale e le sue applicazioni, e contribuiscono a farne una figura di spicco sulla scena internazionale.

Negli anni venti e trenta, Roma diventa effettivamente uno dei migliori centri al mondo per gli studi matematici, grazie anche all'attività scientifica di Levi-Civita. Il suo ruolo di maestro è dovuto, oltre che ai suoi eccezionali contributi, anche al coinvolgimento all'interno dell'International Education Board (IEB). Questa istituzione, fondata nel 1923 con il sostegno finanziario della Fondazione Rockefeller, ha un ruolo significativo nel promuovere studi e collaborazioni scientifiche, soprattutto in Europa, durante il periodo tra le due guerre mondiali.

George David Birkhoff (1884–1944), importante matematico americano e amico di Levi-Civita, viene incaricato dall'IEB di valutare lo stato della matematica nei diversi Paesi. Nella sua relazione datata 8 settembre 1926, Birkhoff riconosce la forza e la tradizione dei gruppi matematici di Parigi, Gottinga e Roma, sottolineandone la forza e l'influenza numerica. In particolare, giudica Levi-Civita e Volterra come i principali punti di riferimento della matematica italiana. Birkhoff scrive nel suo Rapporto:

> Il più grande matematico d'Europa è Hilbert a Göttingen, ma è quasi alla fine della sua carriera. Dopo la guerra, Hardy di Oxford ha forse svolto il lavoro più spettacolare. Per portata e potenza Hadamard, a Parigi, sembra più vicino a Hilbert. I principali leader della matematica europea sono: Volterra e Levi-Civita in Italia; Picard, Hadamard, Lebesgue e Borel in Francia; Hilbert, Landau, Hecke, Carathéodory in Germania; Brouwer in Olanda; Weyl in Svizzera; H. Bohr in Danimarca e Hardy e Whittaker in Gran Bretagna. ([51], p. 270)

Per i giovani matematici degli anni venti e trenta, arrivare a Roma significa incontrare una vasta gamma di opportunità. L'università romana offre infatti la possibilità di approfondire varie discipline sotto la guida di alcuni dei più stimati studiosi dell'epoca. Vi è la scuola di geometria algebrica capeggiata da Guido Castelnuovo, Federigo Enriques e Francesco Severi; l'analisi è soprattutto rappresentata da Volterra, che tuttavia nel 1931 dovrà abbandonare l'università per non aver prestato giuramento al regime fascista; la nascente geometria proiettiva differenziale, che si occupa di strutture metriche in spazi proiettivi, è uno dei campi di ricerca di Enrico Bompiani.

Tuttavia, tra tutte queste opzioni, la maggior parte dei giovani borsisti sceglie di lavorare sotto la supervisione di Levi-Civita per diverse ragioni. In primo luogo, Levi-Civita occupa una posizione chiave all'interno del Rockefeller Education Board. In secondo luogo, le sue attività scientifiche sono all'avanguardia sia in matematica che in fisica, soprattutto grazie alla formulazione e al successivo sviluppo della teoria della relatività generale. Infine, il suo internazionalismo scientifico, noto in Italia e all'estero, attira molti studiosi, in particolare dalla Germania e dall'Austria. Ciò è particolarmente significativo in un'epoca in cui l'esclusione degli scienziati tedeschi e austriaci dalle organizzazioni internazionali è ancora prevalente e sostenuta persino da alcuni dei suoi colleghi a Roma, come Volterra.

Giovani studiosi vengono a Roma da tutte le parti del mondo per fare ricerca sotto la direzione Levi-Civita su argomenti che toccano le discipline più disparate: dal calcolo tensoriale alla relatività, dal problema dei tre corpi all'analisi e all'idrodinamica. Citiamo alcuni nomi: Dirk Struik (1894–2000) (Olanda), Alexander Weinstein (1897–1979) (Germania), Václav Hlavatý (1894–1969) (Cecoslovacchia), Gheorghe Vrănceanu (1900–1979) (Romania), Harold Stanley Ruse (1905–1974) (Gran Bretagna), Harry Levy (1902–1997) (Stati Uniti), Jules Dubourdieu (1903–1986) (Francia)[7].

Socialista e internazionalista, Levi-Civita è un convinto anti-fascista durante tutto il ventennio. Nel 1931, giura però fedeltà al regime nonostante le sue personali convinzioni. Come testimoniano varie fonti, questa scelta è motivata principalmente dalla preoccupazione di preservare la scuola matematica italiana che, con il suo allontanamento, avrebbe perso un importante punto di riferimento.

Secondo il matematico Gino Arrighi (1906–2001), sarebbe stato Volterra a convincere Levi-Civita con l'argomento che rifiutare il giuramento avrebbe comportato un vuoto significativo nel sistema educativo matematico dell'Università di Roma, dove gli studenti sarebbero rimasti senza la loro principale guida[8].

Guido Fubini (1879–1943), gli scrive significativamente il primo dicembre 1931, subito dopo il giuramento:

> Carissimo Levi-Civita,
>
> sono oltremodo lieto che il tuo grande nome, la tua figura, che tanto è gigantesca nella matematica italiana, siano conservati alla scuola d'Italia. (In [44], p. 124)

Vittima delle leggi razziali del 1938, Levi-Civita è destituito dall'insegnamento e costretto ad abbandonare tutte le sue cariche istituzionali per ritirarsi a vita privata. Nonostante le difficoltà, non rinuncia ad aiutare colleghi e studenti italiani e stranieri che, a causa delle persecuzioni antisemite, si trovano obbligati a cercare una nuova posizione fuori dall'Europa. A lui si

[7]Sulla diffusione dell'opera di Levi-Civita, soprattutto nell'ambito del calcolo tensoriale, si veda [52] in particolare il Capitolo 8.

[8]La breve testimonianza di Arrighi è pubblicata in *Lettera matematica Pristem*, 7 febbraio 1993.

rivolgono numerosi stranieri come Alexander Weinstein, Alfred Rosenblatt (1880–1947), Hans Lewy (1904–1988), oltre agli italiani Guido Fubini, Alessandro Terracini (1889–1968) e lo stesso Enrico Volterra (1905–1973), figlio di Vito, per menzionarne solo alcuni.

Levi-Civita muore il 29 dicembre 1941 nel silenzio delle istituzioni italiane.

2 Il contributo alla relatività durante il periodo padovano

È nel 1912 che il giovane Albert Einstein (1879–1955), grazie all'amico Marcel Grossmann (1878–1936), scopre la geometria differenziale inaugurata da Carl Friedrich Gauss (1777–1855) e Bernhard Riemann (1826–1866) e comincia a studiare il calcolo tensoriale di Ricci Curbastro e Levi-Civita. Nel 1913 Einstein e Grossmann pubblicano un primo articolo, l'"Entwurf" [9], che lascia tuttavia aperta una questione fondamentale: le equazioni gravitazionali proposte dai due autori non hanno la proprietà della covarianza generale.

Lo scambio epistolare tra Einstein e Levi-Civita che si situa tra marzo e maggio 1915 porta su questo punto cruciale, con Levi-Civita che mette in causa la dimostrazione chiave dell'Entwurf e Einstein che cerca di giustificarne il contenuto matematico. Infine, il 15 maggio 1915, Einstein riconosce: "La mia prova è incompleta". Ne segue un lavoro forsennato che conduce Einstein alla formulazione delle corrette equazioni di campo alla fine del 1915.

All'inizio del 1916, viene pubblicato su *Annalen der Physik* un lungo articolo in cui Einstein definisce le equazioni di campo a fondamento della teoria della relatività generale, precedute da una lunga introduzione ai metodi tensoriali di Ricci e Levi-Civita indispensabili alla formulazione delle nuove equazioni gravitazionali [8].

L'apporto di Levi-Civita alla relatività non si limita però a questo pur importante contributo. Il suo interesse per la relatività è genuino e risale addirittura al 1910, quando Levi-Civita pubblica una nota sui «Mathematische Annalen» relativa alle trasformazioni di Lorentz [17]. Del resto, come afferma Carlo Cattaneo (1911–1979), matematico e fisico, ma soprattutto allievo di Levi-Civita e suo collaboratore a Roma:

> Se si domanda quale collocazione abbia avuto Levi-Civita nel quadro delle scienze esatte la risposta quasi certa sarà: Levi-Civita fu un grande matematico. La risposta è certamente corretta ma non è completa. Levi-Civita fu indubbiamente un sommo matematico; nella intuizione e nella creazione matematica egli raggiunse livelli che pochi del suo tempo hanno raggiunto. [...] Ma quello che forse non è evidente per tutti è che quando Levi-Civita trattava un problema fisico non era quello per lui, non dirò il pretesto, ma anche soltanto l'occasione di fare della buona matematica, sfruttando una inesauribile e insostituibile fonte di ispirazione: egli aveva interesse e curiosità per il problema fisico in sé. ([4], p. 113)

È comunque nel 1917 che Levi-Civita fornisce un nuovo contributo che si rivela determinante per la teoria della relatività: il trasporto parallelo [18]. L'applicazione alla relatività generale di questo nuovo concetto riguarda soprattutto la struttura matematico-geometrica dello spazio tempo ed è fondamentale nella definizione delle geodetiche, e dunque dei moti inerziali. Il trasporto parallelo permette inoltre un'interpretazione geometrica del tensore di curvatura di Riemann aprendo così la via a straordinari sviluppi per la geometria differenziale, come le nozioni di connessione e di varietà non riemanniane. Levi-Civita è fiero di inscriversi in una lunga tradizione di ricerca che, a partire da Gauss, Riemann e Eugenio Beltrami (1835–1900), raggiunge il suo culmine con la formulazione del calcolo tensoriale da parte di Ricci Curbastro[9].

In altri articoli pubblicati tra il 1917 e il 1919, tutti sui «Rendiconti dell'Accademia dei Lincei», Levi-Civita focalizza i suoi sforzi più direttamente sulla fisica relativistica. Nel primo articolo [19], egli analizza le equazioni gravitazionali nella continuità del suo scambio epistolare con Einstein. Egli *riscrive* le equazioni gravitazionali nella formulazione che oggi ci è familiare usando le celebri identità dovute a Luigi Bianchi (1856–1928) per la prima volta in un contesto relativistico.

Seguono i suoi importanti articoli sulla statica einsteiniana [21] [22] in cui Levi-Civita cerca delle soluzioni 'statiche' per le equazioni del campo gra-

[9]Si veda in particolare il documento redatto dallo stesso Levi-Civita nel 1938 e riprodotto in ([43], pp. 16-17).

vitazionale, sostanzialmente sotto l'ipotesi che la metrica sia indipendente dal tempo (si veda la sez. 4.1). Senza entrare in dettagli tecnici, osserviamo che tale ipotesi gli consente di studiare un'ampia classe di problemi matematicamente più trattabili e con implicazioni fisiche significative, fornendo un modello statico dell'universo. A quel tempo, del resto, non si concepiva ancora una rappresentazione dinamica dell'universo.

Nella sua ricerca, Levi-Civita avanza alcune ipotesi semplificative per ottenere una teoria di approssimazione del primo ordine che si possa applicare a degli esempi concreti, come la 'meccanica planetaria'. Queste ipotesi includono un campo gravitazionale debole e una metrica spaziale molto vicina a quella euclidea. Sebbene queste approssimazioni limitino la generalità della teoria, esse si sono comunque rivelate efficaci e utili per calcoli specifici sulla valutazione della deflessione della luce, come vedremo negli scritti presentati nel presente libro.

Nella nota IX di una serie di articoli pubblicati tra il 1917 e il 1919 [22], Levi-Civita si concentra sul caso statico in cui la varietà che rappresenta lo spazio-tempo V_4 presenta una simmetria assiale. Trae probabilmente ispirazione dalle idee di Karl Schwarzschild (1873–1916), che nel 1916 ha ottenuto la prima soluzione esatta delle equazioni di campo di Einstein in uno spazio vuoto assimilabile a una sfera [50]. Levi-Civita considera uno spazio-tempo a simmetria cilindrica dove, sotto opportune ipotesi, deduce che la sua metrica spaziale corrisponde a uno degli spazi normali già introdotti da Bianchi e ora denominata metrica di Levi-Civita. Anche in diversi articoli recenti, la metrica di Levi-Civita è considerata come la più generale metrica cilindrica del vuoto nel caso statico[10].

Il caso statico consente inoltre a Levi-Civita di evidenziare il legame formale tra la teoria classica e le soluzioni di prima approssimazione che vengono successivamente estese ai casi più generali. Questo metodo, che consiste a partire da teorie o esempi noti per ampliarli gradualmente, è un tratto importante delle sue ricerche e del suo insegnamento.

Un altro aspetto importante concerne i principi variazionali che fungono da elemento unificatore della sua teoria, come mettono anche in luce gli articoli qui presentati. Il principio di Fermat o il principio di Hamilton, svol-

[10]Si vedano gli articoli [7] [32]. Malcom MacCallum identifica la metrica di Levi-Civita con quella di Bertotti-Robinson in [32], p. 2298.

gono infatti un ruolo fondamentale sia nella meccanica classica che in quella relativistica.

Del resto, come molti dei suoi colleghi della prima metà del Novecento, Levi-Civita interpreta la relatività (speciale e generale) come una generalizzazione della fisica newtoniana, la quale resta valida per distanze e velocità *piccole*. Questa ricerca della continuità matematico-formale si scontra con una prospettiva prettamente fisica, secondo la quale i nuovi concetti di spazio e di tempo introdotti da Einstein provocano una rivoluzione concettuale. Per Levi-Civita, insomma, è la matematica che indica la buona strada per una fruttuosa ricerca: sono le equazioni a giocare il ruolo predominante nelle teorie scientifiche piuttosto che i concetti fisici o le evidenze sperimentali.

Alla fine dal 1918, Levi-Civita diviene professore all'Università di Roma dove intraprende un'attività di divulgatore della nuova fisica.

3 Divulgatore della relatività all'Università di Roma

Gli scritti che presentiamo in questo volume si collocano principalmente nel secondo periodo della carriera di Levi-Civita, quello che inizia con il suo trasferimento all'Università di Roma. È qui che Levi-Civita, oltre a sviluppare le sue ricerche, intraprende diverse azioni volte a rafforzare il suo ruolo di 'maestro'. In primo luogo, scrive un gran numero di trattati universitari, sulla meccanica razionale, il calcolo tensoriale, la propagazione delle onde, la relatività ristretta e generale. Inoltre, in quanto membro dell'International Education Board (IEB), accoglie a Roma un gran numero di borsisti stranieri finanziati dalla Rockefeller Foundation. Non tralascia infine di partecipare a diverse attività più strettamente divulgative allo scopo di diffondere la teoria della relatività tra coloro che guardano ancora con scetticismo alla nuova fisica.

Levi-Civita coglie ogni occasione per promuovere la teoria della relatività e il calcolo tensoriale sia in Italia che all'estero. Nel 1921, va in Spagna per tenere una serie di conferenze a Barcellona e Madrid su diversi argomenti legati alle sue ricerche (regolarizzazione del problema dei tre corpi, teoria delle onde, trasporto parallelo e relatività generale) [27]. Lo stesso anno firma la prefazione alla prima traduzione italiana del libro di Einstein *Sulla teoria* *speciale e generale della relatività* pubblicata da Zanichelli [26]. Qui Levi-Civita insiste sulle recenti trasformazioni della filosofia naturale dovute a Einstein tessendo le lodi delle nuove teorie relativistiche.

Un'impresa editoriale più impegnativa è quella relativa alla traduzione italiana del libro di August Kopff (1882–1960) [12] che raccoglie le lezioni tenute dall'astronomo tedesco all'Università di Heidelberg nel 1919/20. Il libro viene tradotto prima in inglese e poi in italiano nel 1923. Ed è qui che entra in scena Levi-Civita.

L'editore italiano, Ulrico Hoepli (1847–1935), in una lettera dell'8 marzo 1922, chiede proprio a Levi-Civita di redigere "una nota sintetica su la di Lei visione scientifica della Teoria, nell'estensione che più Le piacerà". L'idea di Hoepli è di completare il testo originale con la nota di Levi-Civita ma anche con i diversi punti di vista sulla relatività in modo "di far conoscere agli italiani, precisandolo, l'atteggiamento dei migliori uomini nostri d'innanzi all'opera einsteiniana, indubbiamente feconda di sane conclusioni e indubbiamente feconda rappresentatrice delle correnti di pensiero che agitano la nostra età spiritualmente e materialmente travagliata"[11]. Lo scopo è di fornire una preziosa visione del dibattito in corso sulla teoria della relatività.

Levi-Civita accetta la proposta e correda il libro di Kopff di una Parte III intitolata "Complementi", che raccoglie i contributi di vari autori provenienti da diversi orizzonti. Vi si trovano, tra gli altri, scritti di Castelnuovo, Émile Borel (1871–1956), Hermann Weyl (1885–1955), Umberto Cisotti, Enrico Fermi (1901–1954) e Guido Fubini (1879-1943) a sostegno della teoria della relatività di Einstein. Tuttavia, Levi-Civita non censura le opinioni avverse alla relatività che sono espresse nei capitoli di Carlo Somigliana (1860–1955), Michele La Rosa (1880–1933) e Augusto Righi (1850–1920).

Quando Levi-Civita è nominato professore all'Università di Roma, la relatività e il calcolo tensoriale, oltre a non essere presenti nei programmi di insegnamento, non costituiscono neppure un argomento di dibattito o di ricerca per i suoi nuovi colleghi. Il disinteresse riguardo a tali questioni nell'ateneo romano (e più in generale nelle università italiane) è testimoniato dalla corrispondenza tra vari matematici e studiosi dell'epoca. Per esempio Roberto Marcolongo (1862–1943), fisico matematico e professore a Napoli, scrive a Levi-Civita che a Roma le conoscenze sul calcolo tensoriale sono "molto limi-

[11]La lettera è riportata nell'Appendice al volume [52].

tate". Castelnuovo, da parte sua, ammette di avere vaghe nozioni sulla teoria dei tensori, come la maggior parte dei suoi colleghi[12]. Tuttavia, appena Levi-Civita arriva a Roma, Castelnuovo si schiera immediatamente a favore delle teorie relativistiche e collabora con lui per educare i giovani studiosi alla teoria della relatività. Nel 1923, Castelnuovo redige addirittura un trattato dal titolo *Spazio e tempo secondo le vedute di A. Einstein* con l'evidente scopo di contribuire alla diffusione della relatività in Italia [3].

Levi-Civita partecipa attivamente alla diffusione delle teorie di Einstein anche attraverso la sua imponente corrispondenza privata. Molti sono i documenti a supporto di questo argomento. Gian Antonio Maggi (1856–1937), fisico matematico e professore all'Università di Pisa, comunica a Marcolongo di aver ricevuto una lettera da Levi-Civita che gli spiegava gli aspetti essenziali della teoria di Einstein[13]. Significativamente, nel 1921, Maggi pubblica un'introduzione concisa e lucida alla teoria della relatività generale nel giornale dei fisici «Il Nuovo Cimento» [33].

Sollecitato da Levi-Civita, Mauro Picone (1885–1977), in una lettera dell'11 maggio 1919, gli esprime il suo interesse per la fisica moderna e la sua intenzione di approfondire lo studio della relatività nelle sue ricerche future. Gli è grato per aver ricevuto i suoi ultimi lavori sulla 'nuova meccanica' che trova molto preziosi. Nonostante i pressanti impegni istituzionali e concorsuali, Picone sembra attendere con ansia il giorno in cui avrebbe potuto dedicarsi completamente all'esplorazione di questi argomenti affascinanti, passando dal suo campo iniziale (l'analisi) alla relatività[14].

Levi-Civita porta avanti ancora un'altra iniziativa destinata ad avere un impatto sulla diffusione della teoria della relatività tra i suoi colleghi dell'Università di Roma. Al termine della Prima guerra mondiale, nel 1919, il Seminario Matematico riprende le sue attività presso l'Università di Roma. Castelnuovo e il fisico matematico Lucio Silla (1872-1959) sono incaricati dal direttore Volterra di organizzare delle lezioni sulla relatività e sui suoi metodi matematici. Levi-Civita, in quanto figura stimata nel settore, è subito invitato a tenere conferenze al Seminario e diviene presto membro del suo consiglio direttivo. Per Levi-Civita, il Seminario Matematico diventerà un'importan-

[12] La lettera di Marcolongo a Levi-Civita è datata 29 gennaio 19129; la lettera di Castelnuovo a Marcolongo è datata 27 febbraio 1919. Entrambe sono pubblicate in ([53], pp. 244-245).

[13] La lettera di Maggi a Marcolongo è del 25 settembre 1917; si veda ([5], p. 219).

[14] La lettera è citata in ([6], p. 223).

te palcoscenico per la diffusione e la promozione della fisica moderna, in particolare della teoria della relatività.

È al Seminario Matematico del 1918/19 che Levi-Civita tiene la celebre conferenza dal titolo "Come potrebbe un conservatore arrivare alla soglia della nuova meccanica" [24] qui riprodotta. Nella sua conferenza, Levi-Civita sostiene che molti scienziati, al fine di salvaguardare un patrimonio intellettuale consolidato, potrebbero propendere per una forma di conservatorismo che li porterebbe a una comprensibile opposizione alla teoria della relatività ([24], p. 197). La sua conferenza mostra come, introducendo modifiche plausibili alle leggi naturali, si possa sviluppare una teoria sistematica (la teoria della relatività generale di Einstein) in grado di spiegare con successo vari fenomeni fisici come la curvatura della luce e la precessione 'anomala' del perielio di Mercurio. Nelle conclusioni, Levi-Civita loda la nuova meccanica che, similmente a quanto accade per la fisica newtoniana, è in grado di unificare tutti i fenomeni naturali ponendoli all'interno di un quadro teorico coerente ([24], p. 216).

Oltre alla conferenza di Levi-Civita, nell'aprile del 1919 hanno luogo al Seminario Matematico due altre comunicazioni, una sulla teoria speciale della relatività [36] e l'altra sui fondamenti analitici della relatività generale e delle equazioni di campo [37]. Entrambe le lezioni sono tenute da Roberto Marcolongo che è l'autore del primo libro italiano sulla teoria della relatività destinato a un pubblico non specialistico [38]. Il libro, pubblicato nel 1921, raccoglie le sua lezioni tenute all'Università di Napoli negli anni accademici 1918/19 e 1919/20.

Nel 1921, Levi-Civita, insieme a Enriques, è l'artefice di un momento significativo nella vita scientifica italiana: la prima venuta di Einstein in Italia. Einstein, che ha da poco ricevuto il Premio Nobel per il suo lavoro sull'effetto fotoelettrico, è infatti invitato da Levi-Civita e Enriques a tenere tre conferenze sulla relatività a Bologna il 22, 24 e 26 ottobre. Le conferenze hanno un forte impatto mediatico e richiamano un folto pubblico. Durante questa visita Einstein e Levi-Civita si incontrano per la prima volta[15].

Dobbiamo ammettere che, nonostante i suoi sforzi, Levi-Civita non riuscirà a fondare una vera e propria scuola di relatività in Italia. La resistenza contro la fisica moderna è ancora prevalente tra molti scienziati, tra cui famo-

[15]Sulle lezioni di Einstein all'Università di Bologna si veda [30]. Einstein tiene anche una conferenza a Padova il 27 ottobre, dove incontra Ricci Curbastro ([1], pp. 89–90).

si matematici e fisici che si oppongono con veemenza alla teoria di Einstein, come Somigliana, Righi o La Rosa. I dibattiti sulla teoria della relatività pubblicati sulla rivista italiana *Scientia* negli anni venti evidenziarono la forte opposizione della maggioranza degli studiosi italiani, spesso accompagnata da un tono di arroganza.

Sebbene diversi matematici, per la maggior parte appartenenti alla stretta cerchia di collaboratori e studenti di Levi-Civita, mostrino interesse per la teoria della relatività, essi non diventeranno dei veri specialisti della disciplina. Il loro contributo si limita in effetti alle questioni matematiche della relatività tralasciando le sue implicazioni fisiche[16].

4 Piccola Appendice: una lettura più interna

4.1 *La teoria di Einstein e il principio di Fermat* [23]

È il 1918. In questo primo lavoro si giustifica l'equivalenza di due principi fondamentali: del 'principio di Fermat', o del tempo minimo, emerso come ricetta naturalistica, successivamente inquadrato rigorosamente nell'ottica geometrica dell'elettromagnetismo classico, e del cosiddetto 'postulato di Hilbert' dell'ottica geometrica Einsteiniana, che afferma che i raggi luminosi sono geodetiche di lunghezza nulla ($ds^2 = 0$) della metrica dello spazio-tempo.

La validità di tale equivalenza risulta circoscritta ad uno spazio-tempo V_4 dotato di metrica 'stazionaria', cioè del tipo $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)$, $\alpha\beta = 0, 1, 2, 3$. Tra queste, Levi-Civita seleziona le metriche 'statiche':

$$g_{00} = g_{00}(x^1, x^2, x^3) > 0,\ g_{0i} = 0,\ g_{ij} = -a_{ij}(x^1, x^2, x^3),\ \ i, j = 1, 2, 3,$$

ove a_{ij} è definita positiva, si veda [21].

La dimostrazione di Levi-Civita è assai interessante. Mette in opera un procedimento limite: parte dal generico principio variazionale per geodetiche di tipo tempo (*time-like*), ossia con $ds^2 > 0$,

$$\delta \int ds = 0\,, \tag{1}$$

ritiene (è ragionevole) di poter esplicitare dt dall'espressione

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + 2g_{0i}dtdx^i + g_{ij}dx^idx^j = 0\,, \tag{2}$$

[16]Si veda l'articolo [34], in particolare p. 170.

con

$$dt = f(t, x^1, x^2, x^3; dx^1, dx^2, dx^3)\,. \tag{3}$$

Inserisce nella (1) le variazioni per dt ottenute dalle (3) come un vincolo descritto mediante un moltiplicatore di Lagrange. In questa impostazione scopre che mandare $ds \to 0$ ammette un limite non singolare e giunge infine a

$$\delta \int dt = 0\,, \tag{4}$$

che è manifestamente il principio di Fermat.

Ritroveremo anche in altri articoli questa pulsione culturale di Levi-Civita a raffrontare elementi descrittivi della fisica pre-relativistica (oltre a Fermat, vedremo in opera anche il principio dell'azione stazionaria) con aspetti, in ragionevole approssimazione, della nuova teoria relativistica. Questo atteggiamento metodologico e didattico è sicuramente ben riassunto dal titolo del prossimo articolo.

4.2 *Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova meccanica* [24]

La prima pagina di questo lavoro, che appar essere un biglietto di presentazione di Levi-Civita giunto a Roma nel 1919, è largamente riconosciuta come una lezione di etica, di educazione civica al pensiero scientifico. Levi-Civita vuole portare per mano il lettore, dalla meccanica classica alla meccanica relativistica, riducendo al minimo forzature ideologiche.

Nella *Sezione 1*, Levi-Civita muove dalla formulazione variazionale della meccanica analitica, $\delta \int L(x, \dot{x}, t)\, dt = 0$, richiama il carattere 'invariante in forma' delle equazioni di Lagrange per generiche trasformazioni di coordinate[17] $y = y(x, t)$, e le loro inverse $x = x(y, t)$:
Se $x(t)$ risolve

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

allora e solo allora $y(t) := y(x(t), t)$ risolve

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

[17] Più precisamente, diffeomorfismi che lasciano invariato il tempo, del tipo: $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \ni (x, t) \mapsto (y(x, t), t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

dove $\mathcal{L}(y, \dot{y}, t) := L\left(x(y,t), \frac{\partial x}{\partial y}(y,t)\dot{y} + \frac{\partial x}{\partial t}(y,t), t\right)$ è la naturale ricomposizione di L nelle nuove variabili geometrico-cinematiche $y, \dot{y}$.

Ora, un primo passo da compiere per Levi-Civita, proprio per calibrare una nuova mentalità 4-dimensionale, consiste nell'indagare su cosa accade se nel calcolo diretto delle variazioni compiamo pure delle variazioni in t, non solo nelle x.

Siamo nella *Sezione 2*, inizia il suo racconto riportando una nota identità, che tra l'altro è anche all'origine dell'integrale primo[18] di Jacobi:
Se $x(t)$ risolve le equazioni di Lagrange (5), allora

$$\frac{d}{dt}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

I passaggi tecnici che seguono in quella pagina, e in quella successiva, potrebbero apparire leggermente criptici. Levi-Civita li propone tranquillamente perché questi fanno parte di una costruzione ben nota a quel tempo, e cioè conti che competono al principio variazionale di Hölder, un argomento standard di meccanica analitica per Levi-Civita, come è riportato nel volume secondo, parte seconda, delle Lezioni di Meccanica Razionale [14]. Procediamo con ordine. Proviamo a capire cosa accade se del nostro funzionale $\int L(x, \dot{x}, t)\, dt$ compiamo ora delle variazioni nel tempo $\delta t(t)$ nulle agli estremi: $\delta t(t_0) = 0 = \delta t(t_1)$. Se $x = x(t)$ è una curva soluzione di (5), allora la curva variata per $\delta t(t)$ come sopra sarà:

$$\hat{x}(\tau) = x(t)\big|_{t=t(\tau)}, \qquad \tau(t) = t + \delta t(t). \tag{8}$$

Levi-Civita denota con questo simbolo "∂" le conseguenti variazioni; per la velocità:[19]

$$\partial \dot{x} := \frac{d\hat{x}}{d\tau}(\tau) - \frac{dx}{dt}(t)\big|_{t=t(\tau)}. \tag{9}$$

$$\frac{d\hat{x}}{d\tau} = \frac{dx}{dt}(t)\big|_{t=t(\tau)}\frac{dt}{d\tau}(\tau) = \frac{dx}{dt}(t)\big|_{t=t(\tau)}\frac{1}{\frac{d\tau}{dt}\big|_{t=t(\tau)}},$$

$$= \frac{dx}{dt}(t)\big|_{t=t(\tau)}\frac{1}{1 + \frac{d}{dt}\delta t\big|_{t=t(\tau)}} = \frac{dx}{dt}(t)\big|_{t=t(\tau)}\left(1 - \frac{d}{dt}\delta t\big|_{t=t(\tau)}\right) + O_2,$$

[18] La quantità tra parentesi in (7) è una costante del moto se L è indipendente dal tempo.
[19] Si osservi che l'approssimazione usata è: $\frac{1}{1+\xi} = 1 - \frac{1}{(1+\xi)^2|_{\xi=0}}\xi + O(|\xi|^2) \simeq 1 - \xi$.

ne segue che, a meno di termini del secondo ordine,

$$\partial \dot{x} = -\dot{x}\frac{d}{dt}\delta t\,. \tag{10}$$

Quest'ultima è esattamente la formula che compare nell'articolo in esame a pagina 201. Consideriamo ora la conseguente variazione del funzionale di Hamilton,

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1} L\,\partial dt + \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\partial t + \frac{\partial L}{\partial x}\partial x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\partial \dot{x}\right)dt\,, \tag{11}$$

accanto alla (10) valgono le relazioni:

$$\partial x \equiv 0\,, \qquad \partial t = \tau - t = \delta t\,, \qquad \partial dt = d\tau - dt = d\delta t\,, \tag{12}$$

cosicché (11) diventa

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1} L\,\frac{d}{dt}\delta t\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\delta t - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\frac{d}{dt}\delta t\right)dt\,,$$

integrando per parti e tenendo conto di (7),

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right) - \frac{\partial L}{\partial t}\right]\delta t\,dt = 0\,.$$

Vale la pena riassumerne in dettaglio l'enunciato:

Una curva regolare $[t_0, t_1] \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^N$ appartenente alla classe delle curve a estremi fissati risolvente le equazioni di Lagrange – pertanto stazionarizzante il funzionale $\int_{t_0}^{t_1} L\,dt$ per variazioni spaziali $\delta x(t)$ a estremi nulli – risulta rendere stazionario lo stesso funzionale anche per variazioni temporali $\delta t(t)$ a estremi nulli.

Questa osservazione, poco nota, appare essere quanto di più 'omogeneamente 4-dimensionale' si possa trarre dal principio variazionale di Hamilton.

Levi-Civita, nella *Sezione 3*, mette sull'avviso il lettore intorno all'impossibilità di estendere la teoria invariantiva delle equazioni di Lagrange – come visto in (5) e (6) – a più generali trasformazioni spazio-temporali del tipo:

$$y^\alpha = y^\alpha(x^\beta)\,, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3\,, \qquad x^0 = t\,, \qquad y^0 = \tau\,. \tag{13}$$

La sua pulsione a portar il lettore ad una accettazione/comprensione della nuova meccanica relativistica lo conduce alla *Sezione 4*, ove realizza un piccolo 'capolavoro': sarà la struttura stessa della funzione Lagrangiana ad essere modificata per una gestione geometrico-invariante della teoria sotto trasformazioni generali (13). Ci si restringe al caso puramente meccanico conservativo, una particella di massa unitaria $m = 1$ in un potenziale[20] scalare di forze U. La funzione Lagrangiana è dunque $L = \frac{v^2}{2} + U$. Com'è facile verificare, principio variazionale ed equazioni di Lagrange restano immutati per trasformazioni *affini* della Lagrangiana, $L \Rightarrow aL + b$. Considereremo alternativamente a L:

$$c^2 - L\,.$$

Qui c^2 è una costante che solo fra poco sarà identificabile con il quadrato della velocità della luce. Scriviamola in dettaglio:

$$c^2 - L = c^2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{U}{c^2}\right)\,.$$

Tenendo conto della piccolezza del termine $\xi = \frac{v^2}{c^2} + \frac{2U}{c^2}$, scriveremo[21]

$$c^2 - L = c^2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{U}{c^2}\right) = c^2 \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{2U}{c^2}\right)\right)\,,$$

$$\simeq c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{2U}{c^2}\right)}\,, \qquad c^2 - L \simeq c\sqrt{c^2 - v^2 - 2U}\,.$$

Utilizzando la definizione dell'elemento d'arco spaziale $d\ell_0^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\,,\ \left(\frac{d\ell_0}{dt}\right)^2 = v^2$, giungiamo, a meno dell'approssimazione e abbandonando un c a fattore, ai seguenti principi variazionali equivalenti:

$$\delta \int L\,dt = 0 \ \sim\ \delta \int (c^2 - L)\,dt = 0 \ \sim\ \delta \int \sqrt{c^2 - \left(\frac{d\ell_0}{dt}\right)^2 - 2U}\,dt = 0\,.$$

[20] L''energia potenziale' è la funzione energetica più comunemente usata oggi, essa, $-U$, è l'opposto del 'potenziale' qui usato: U.

[21] Si osservi che l'approssimazione usata è: $\sqrt{1-\xi} = 1 - \frac{1}{2(1-\xi)^{3/2}|_{\xi=0}}\xi + O(|\xi|^2) \simeq 1 - \frac{\xi}{2}$.

Si tratta ora di introdurre nello spazio-tempo $V_4 = \mathbb{R}^4$ la seguente forma quadratica non-definita (iperbolica):

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U\right) dt^2 - d\ell_0^2\,,$$

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U(x^1, x^2, x^3)\right] dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2\,, \tag{14}$$

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U(x^1, x^2, x^3)\right] (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2\,,$$

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta\,, \tag{15}$$

dove (ricordiamo che a questo stadio x^0 è ancora uguale a t, diventerà ct più avanti, poco a monte della (21)):

$$g_{\alpha\beta}(x) := \begin{pmatrix} c^2 - 2U(x^1, x^2, x^3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \tag{16}$$

Ne segue che il principio variazionale suona così:

$$\delta\int ds = \delta\int \sqrt{\left[c^2 - 2U(x^1, x^2, x^3)\right](dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} = 0\,. \tag{17}$$

Il ds^2 in (15) è tensorialmente invariante per trasformazioni generali (13),

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta = \sum_{\rho,\sigma=0}^{3} \hat{g}_{\rho\sigma}(y) dy^\rho dy^\sigma\,, \tag{18}$$

a patto che g si trasformi isometricamente

$$\hat{g}_{\rho\sigma}(y) = g_{\alpha\beta}(x(y)) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\rho}(y)\, \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\sigma}(y)\,. \tag{19}$$

La funzione Lagrangiana che emerge da (17), cioè

$$\hat{L}(x^\alpha, \dot{x}^\beta) = \sqrt{\left[c^2 - 2U(x^1, x^2, x^3)\right] (\dot{x}^0)^2 - (\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2 - (\dot{x}^3)^2}\,,$$

$$= \sqrt{\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}(x)\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}}\,,$$

è positivamente 1-omogenea nelle $\dot{x}^{\alpha}$, pertanto la nostra ricerca variazionale sarà di curve $\lambda \mapsto x(\lambda)$, indipendentemente dalla λ-parametrizzazione adottata, per esempio per $\lambda \in [0, 1]$. Si riterrà ben fisicamente applicabile tale Lagrangiana, con radicando positivo o nullo, per moti con velocità di scala planetaria oppure per raggi luminosi: per $v \approx 30\; km/sec$ e $c \approx 3 \cdot 10^5\; km/sec$ si ha che

$$\frac{v^2}{c^2} \text{ e } \frac{U}{c^2} \;\approx\; 10^{-8}\,.$$

I moti meccanici $\lambda \mapsto x^{\alpha}(\lambda)$ che rendono stazionario il funzionale

$$\delta \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} ds = \delta \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} \sqrt{\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}(x(\lambda))\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}(\lambda)\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}(\lambda)}\, d\lambda = 0 \qquad (20)$$

sono – come afferma nella *Sezione 5* – infine *geodetiche* nello spazio-tempo V_4 dotato della metrica (15). Levi-Civita recupera in un formato 4-dim. completamente invariante[22] il principio variazionale 3-dim. associato alla metrica di Jacobi-Maupertuis della meccanica analitica classica.

Nella *Sezione 6*, ponendo $U = 0$ e decidendo di *ridefinire infine* $x^0 = ct$, si registra che i raggi di luce, che viaggia alla velocità c, compiono *geodetiche*

[22] In realtà, ai diffeomorfismi (13) si dovrà chiedere qualcosa in più, p.e., un'invariante orientazione del tempo: $\frac{\partial y^0}{\partial x^0} > 0$. Roger Penrose e coll. hanno proposto un preciso protocollo affinché lo spazio-tempo sia globalmente iperbolico.

di lunghezza nulla secondo la metrica iperbolica, detta di Minkowski[23],

$$\eta_{\alpha\beta} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$ds_0^2 = c^2t^2 - d\ell_0^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0\,. \tag{22}$$

La questione che dobbiamo porci ora è la seguente. In questa ricostruzione matematica deve entrare la nuova fisica. Restringendoci a trasformazioni lineari $y = \Lambda x$, corrispondenti (nella qui emergente relatività ristretta) a trasformazioni tra sistemi inerziali che generalizzano quelle di Galilei, ebbene, a quali relazioni devono essere vincolate le Λ affinché la velocità c dei raggi di luce sia sempre la *stessa* c in ogni sistema inerziale? Se indichiamo con $x = x_{(2)} - x_{(1)}$ la differenza delle coordinate temporali e spaziali tra due eventi dello spazio-tempo, diciamoli $\mathcal{E}_{(1)}$ e $\mathcal{E}_{(2)}$, coinvolti da un raggio di luce, avremo

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0\,,$$

e così pure dobbiamo ritenere che, per $y = \Lambda x$,

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_{\ \rho} x^\rho \Lambda^\beta_{\ \sigma} x^\sigma = 0\,.$$

[23] A pag. 207 del lavoro che stiamo leggendo, si ritrova una interessante affermazione bibliografica: Levi-Civita attribuisce a Marcolongo l'aver introdotto *per primo* l'uso del tempo immaginario $y^0 = \sqrt{-1}ct$, tale che la 4-norma Euclidea $\sum_{\alpha=0}^{3}(y^\alpha)^2$ diventi la 4-pseudo-norma iperbolica associata a η. La lettura del lavoro di Marcolongo [35] del 1906 mostra questo fatto. Quest'introduzione di $y^0 = \sqrt{-1}ct$ è spesso erroneamente attribuita a Minkowski. Va comunque rimarcato che l'uso che ne fa Marcolongo è ausiliario e strettamente correlato nella scrittura delle equazioni di Maxwell. In realtà, il suo uso nella 4-metrica fu propriamente di Minkowski [39, 40, 41]. Nel corso degli anni questo recuperato aspetto euclideo si è rivelato effimero rispetto ad altre difficoltà geometriche che l'introduzione del tempo immaginario produceva. Non sorprende che il moderno racconto della relatività – si veda p.e. il manuale fondamentale [42], p. 51 – accolga con sollievo l'abbandono del tempo immaginario.

L'invarianza della velocità della luce si traduce nell'invarianza del 'cono luce' per le nuove trasformazioni fisicamente ammissibili Λ, che stiamo appunto cercando. Qui interviene un semplice teorema[24] algebrico legato alla forma iperbolica η, che afferma:

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \iff \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta = 0 \quad \text{per} \quad y = \Lambda x$$

solo e soltanto se, per qualche $k \neq 0$, si ha che: $\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_{\ \rho} \Lambda^\beta_{\ \sigma} = k\, \eta_{\rho\sigma}\,.$

Scrivendo compattamente e per $k = 1$,

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta\,. \tag{23}$$

Queste relazioni (23) caratterizzano le *trasformazioni di Lorentz*, che sono le isometrie della metrica Minkowskiana η e stanno alla base della *relatività ristretta.*

Il nostro compito di ausilio tecnico (così, sperabilmente) si potrebbe ritenere qui concluso. Il bel lavoro originale di Levi-Civita appare nel seguito agilmente leggibile. Nelle *Sezioni 7-11* si entra in un racconto che coinvolge l'ottica geometrica, che prende in considerazione anche l'*incurvamento* dei raggio luminosi sotto l'effetto di campi di forze.

Questo fenomeno è ripreso da Levi-Civita riaccendendo il potenziale U in (16), più precisamente, considerando la posizione fatta $x^0 = ct$, la metrica g si riscrive

$$g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2U(x^1,x^2,x^3)}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Il percorso epistemico è avvincente. In un ambito puramente di meccanica classica si era poco sopra giunti ad affermare che i moti delle particelle stazionarizzano la lunghezza d'arco s nello spazio-tempo V_4, cioè il funzionale (20). A questo punto, c'è l'ingresso della relatività ristretta: la velocità

[24]Si veda p.e. [49], esercizio 1) a p. 23.

della luce c nel vuoto è la stessa in ogni sistema di riferimento. *In assenza* di forze $U = 0$, lungo i raggi si ha $ds^2 = c^2dt^2 - d\ell_0^2 = 0$, e da tale invarianza ne discendono le trasformazioni di Lorentz Λ. Ora il passo successivo è pensare alla propagazione dei raggi luminosi *in presenza* di $U \neq 0$: cosa si eredita dalle precedenti deduzioni? Certamente ancora si postulerà $ds^2 = 0$, ma ora con la metrica completa (24): le geodetiche di lunghezza nulla in V_4 saranno le nuove traiettorie dei raggi luminosi, definitivamente non più rettilinei.

È interessante ricordare che per tale fenomeno, nella sua più 'catastrofica' rappresentazione[25], fu proposta una descrizione tecnica 'classica' da Pierre Simon Laplace (1749-1827) in [13]; nell'*Appendix A* del trattato [11] di Hawking ed Ellis vi si ritrova la traduzione in inglese.

Tuttavia, come è documentato in [31], "pensare alla deflessione della luce dovuta all'attrazione gravitazionale dei corpi celesti ha una lunga tradizione che risale a Isaac Newton (1642-1726) [47]. Il calcolo fu pubblicato per la prima volta da Johann Georg von Soldner (1776-1833). Solo in tempi più recenti, dopo la positiva conferma della deflessione gravitazionale della luce nel 1919, è stato pure riconosciuto il lavoro di Henry Cavendish (1731-1810) su tale argomento."

4.3 *L'ottica geometrica e la relatività generale di Einstein* [25]

Levi-Civita esordisce ribadendo l'entusiasmo attorno alla verifica sperimentale della deflessione della luce, riconosciuta esattamente quell'anno (il 1919) dagli 'astronomi inglesi', dal gruppo diretto da Arthur Stanley Eddington.

Nella prima pagina di quest'articolo Levi-Civita inserisce una nota a piè di pagina in cui rimarca con forza che la matematica che servì ad Einstein per la sua teoria della relatività generale fu fornita solo e soltanto da Gregorio Ricci Curbastro, il cui beneficio risulta paragonabile a quello della matematica delle coniche di Apollonio per le leggi di Kepler. Traspare ancora la sua modestia e nobiltà d'animo, nel non accostare il suo nome all'edificazione del calcolo differenziale assoluto, senza accennare né al memorabile scambio epistolare che ebbe con Einstein nel 1915, né alla sua teoria del trasporto parallelo del 1917.

[25] 'Buchi neri ante litteram'.

Levi-Civita conclude l'Introduzione affermando che un'eccellente memoria scientifica sull'argomento del presente lavoro è esattamente quella del Palatini [48], mentre l'attuale 'mira ad illustrare soltanto il fenomeno ottico col minimo sforzo', ribadendo ancora una volta la sua vocazione divulgativa.

Una deduzione importante in questo articolo è nel paragrafo 9. Proviamo a commentarla, motivando così pure la nostra introduzione del *Richiamo sul Principio dell'Azione Stazionaria* in 4.3.1. L'intento di Levi-Civita è di offrire una giustificazione in meccanica classica della deviazione della luce in un campo di forze di potenziale U. Il suo punto di partenza, qui conviene riguardarne il paragrafo 7, è supporre che la luce si propaghi come una particella 'classica' di massa convenzionale[26] $m = 1$ di Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}v^2 + U \tag{25}$$

con valore assegnato di energia totale E pari a $c^2/2$,

$$E = \frac{1}{2}v^2 - U = \frac{1}{2}c^2 \tag{26}$$

In tal caso infatti[27]

$$v^2 = c^2 + 2U = c^2\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) . \tag{27}$$

Levi-Civita conclude, per avvalorare la sua scelta (26), dicendo che nell'ultima formula si ha, con buonissima approssimazione, $v = c$, come effettivamente accade; e scrive: c.d.d.

Si tratta ora della determinazione dei raggi. Come poc'anzi accennato, si fa appello al Principio dell'Azione Stazionaria - cf. (39):

$$\delta\int_{\ell_0}^{\ell_1}\sqrt{E+U}\,d\ell_0 = 0 \;\sim\; \delta\int_{\ell_0}^{\ell_1}\sqrt{\frac{1}{2}c^2 + U}\,d\ell_0 = 0 \;\sim\; \delta\int_{\ell_0}^{\ell_1}\sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}}\,d\ell_0 = 0\,, \tag{28}$$

[26]Ipotesi già introdotta in [24].

[27]Si noti un piccolo errore di battitura nel lavoro originale: nella formula centrale di pagina 277 i due segni dovrebbero essere cambiati. Effettivamente tale svista non si propaga: nella successiva pagina 281 ricompare il giusto segno $+$.

dove $(28)_3$ è la formula (9) dell'articolo che stiamo leggendo e commentando.

L'equazione variazionale $(28)_3$ ci offre l'andamento curvilineo della luce semplicemente pensando ad una natura corpuscolare della luce in un campo di forze di potenziale U. Questo punto di vista 'ideologico' classico non differisce, se non tecnicamente, da quanto congetturato dai pionieri già citati, a partire da Newton stesso, cf. [11, 13, 31, 47].

Qual è la correzione offerta dalla *relatività generale* di tale descrizione? Ebbene, nel paragrafo 9, Levi-Civita richiama alcuni conti che appaiono ben descritti nella versione inglese del suo manuale di Calcolo Differenziale Assoluto [28]. Non li riportiamo. Sottolineiamo che prendono direttamente le mosse dalle equazioni gravitazionali di Einstein, introducendo opportune (e fini) approssimazioni, e ancora pensando ad un potenziale U, ora preso armonico ($\Delta U = 0$). Il risultato finale consiste nell'implementazione della metrica in (14) e (24) nella

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) d\ell_0^2 \tag{29}$$

Facciamo qualche semplice conto per ricavare un'espressione per il modulo della velocità di propagazione, naturalmente sempre pensando a $ds^2 = 0$:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2U}{c^2}}{1 + \frac{2U}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4U^2}{c^4}}{1 + \frac{4U}{c^2} + \frac{4U^2}{c^4}}} \simeq \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{4U}{c^2}}} \,. \tag{30}$$

La novità finale consiste ora nell'invocare il Principio di Fermat del Tempo Minimo[28] per disegnare le curve dei raggi luminosi:

$$\delta \int dt = 0 : \qquad \delta \int \frac{1}{v} d\ell_0 = \frac{1}{c} \delta \int \sqrt{1 + \frac{4U}{c^2}} d\ell_0 = 0 \tag{31}$$

La discrepanza descrittiva (la sostituzione di U in $2U$) tra l'equazione variazionale classica $(28)_3$ e quella relativistica $(31)_3$ è quantitativamente discussa da Levi-Civita, che riporta conferme osservative alla fine dell'articolo. Un ulteriore racconto, storico e tecnico, su tutta questa materia si ritrova estesamente esposto nel capitolo 6 del volume [52].

[28] Il principio di Fermat scende direttamente dalle equazioni di Maxwell, in approssimazione di ottica geometrica.

4.3.1 *Richiamo sul Principio dell'Azione Stazionaria, o della Minima Azione*

La Lagrangiana di una particella libera di massa m soggetta ad un campo conservativo di potenziale[29] $U(q)$ si scrive

$$L(q,v) = \frac{1}{2}m|v|^2 + U(q)\ , \qquad L : T\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ , \tag{32}$$

ad essa resta associata l'Hamiltoniana (per Legendre)

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}|p|^2 - U(q)\ , \qquad H : T^*\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ . \tag{33}$$

Fissiamo un valore energetico $E \in \mathbb{R}$ compatibile con H. Con esso, contruiamo la seguente Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,v) = \frac{1}{2}m\left(E + U(q)\right)|v|^2, \qquad \mathcal{L} : T\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ , \tag{34}$$

la cui Hamiltoniana risulta (ancora per Legendre)

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m\left(E + U(q)\right)}|p|^2\ , \qquad \mathcal{H} : T^*\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ . \tag{35}$$

Notiamo che sull'ipersuperficie $H^{-1}(E)$, *coincidente* in $T^*\mathbb{R}^3$ con $\mathcal{H}^{-1}(1)$, i rispettivi campi vettoriali Hamiltoniani X_H e $X_{\mathcal{H}}$, che ad essa sono tangenti, sono tra loro *proporzionali*:

$$X_H : \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}\ , \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q}\ , \end{cases} \qquad X_{\mathcal{H}} : \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{1}{(E+U(q))}\frac{p}{m}\ , \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \frac{|p|^2}{2m(E+U(q))^2}\frac{\partial U}{\partial q}\ , \end{cases} \tag{36}$$

dato che $\frac{|p|^2}{2m(E+U(q))} = 1$. Ne segue che

$$X_{\mathcal{H}}|_{\mathcal{H}^{-1}(1)} = \frac{1}{(E + U(q))}X_H|_{H^{-1}(E)}\ . \tag{37}$$

Questo significa che le soluzioni dei due campi sopra quell'ipersuperficie, a partire da ugual punto (q_0, p_0), hanno ugual supporto e dunque sono riparametrizzabili:

$$(q_H(t), p_H(t)) = (q_{\mathcal{H}}(\bar{t}(t)), p_{\mathcal{H}}(\bar{t}(t)) \tag{38}$$

[29]Si ricordi la nota (20) a piè di pagina.

Guardando alle sole componenti q, le $q_H(t)$ e $q_{\mathcal{H}}(\bar{t})$, queste risultano (ancora per Legendre) rispettivamente soluzioni delle equazioni di Lagrange per L e $\mathcal{L}$, in (32) e (34). Dunque sono soluzioni relative ai problemi variazionali Lagrangiani per $\int L$ e $\int \mathcal{L}$ con la condizione energetica $\frac{1}{2}m|v|^2 - U(q) = E$. Quanto fin qui raccontato segue le linee di pensiero di Godbillon [10] nella costruzione della metrica $\mathcal{L}$ di Jacobi-Maupertuis (34). Ora, con un argomento standard che utilizza la 2-omogeneità di $\mathcal{L}$ in $v = \dot{q}$ e dunque la 1-omogeneità di $\sqrt{\mathcal{L}}$, possiamo infine affermare che, a meno di riparametrizzazione, le soluzioni variazionali per $\int \mathcal{L}$ lo sono pure per $\int \sqrt{\mathcal{L}}$. Riscriviamo infine nel dettaglio il funzionale del principio variazionale $\int \sqrt{\mathcal{L}}$:

$$
\begin{aligned}
&\bar{J} : \left\{ q(\cdot) \in C^2([0,1]; \mathbb{R}^3) : \ q(0) = q_A, \ \ q(1) = q_B \right\} \longrightarrow \mathbb{R} \,, \\
&q(\cdot) \longmapsto \bar{J}(q(\cdot)) = \int \sqrt{\mathcal{L}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{m(E + U(q))} \underbrace{\left| \frac{dq}{d\lambda} \right|}_{v} d\lambda \,, \\
&\qquad\qquad = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int_{\ell_0}^{\ell_1} \sqrt{m(E + U(q))}\, d\ell_0 \,.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

L'ultima rappresentazione di $\bar{J}$ è puramente simbolica (ma è quella che si ritrova nei testi), dato che non conosciamo a priori ℓ_0 e ℓ_1, più esattamente $\ell_1 - \ell_0$.

Ecco infine la successione di equivalenze variazionali a meno di riparametrizzazioni sul vincolo energetico $E = \frac{1}{2}m|v|^2 - U(q)$:

$$
\delta \int L = 0 \quad \underbrace{\sim}_{(38)} \quad \delta \int \mathcal{L} = 0 \quad \underbrace{\sim}_{1-\text{omogeneità}} \quad \delta \int \sqrt{\mathcal{L}} = 0 \,.
$$

4.4 *Sulla nozione di intervallo fra due avvenimenti: primo approccio alla teoria della relatività* [29]

Questo articolo del 1936 sulla relatività ristretta è un ritorno epistemologico alla teoria ancestrale di Einstein del 1905. Come Levi-Civita esordisce, è stata proprio una sua chiacchierata con Einstein il motore di questo suo, tardo se vogliamo, intervento quasi filosofico sui concetti primitivi della relatività ristretta. Nella sezione 4.1 avevamo messo in evidenza la pulsione culturale, un certo atteggiamento etico e didattico di Levi-Civita per giungere a chiarificazioni delle teorie relativistiche mediante elementi culturali pre-esistenti, consolidati. Nella prima pagina di quest'articolo Levi-Civita afferma di aver avuto un 'incentivo scolastico', emergente nel raccontare, ad ogni inizio del corso, la cinematica ai suoi studenti, per rimeditare la materia. È interessante la sua denominazione originale, di 'avvenimento elementare', di quello che nei decenni a venire sarà chiamato 'evento spazio-temporale'. Queste belle pagine si leggono con le nozioni elementari della geometria euclidea, accompagnata infine dalla conoscenza delle funzioni iperboliche (la tangente iperbolica).

Riferimenti bibliografici

[1] F. Cardin, *Il concetto di curvatura. Genesi, sviluppo e intreccio fisico-matematico*. Springer, 2023

[2] F. Cardin, R. Tazzioli, Levi-Civita simplifies Einstein. The Ricci rotation coefficients and unified field theories. *Archive for History of Exact Sciences* **78** (2024), 87–126

[3] G. Castelnuovo, *Spazio e tempo secondo le vedute di A. Einstein.* Zanichelli, Bologna, 1923

[4] C. Cattaneo, Leggi classiche e leggi relativistiche nel pensiero di Tullio Levi-Civita. In AA. VV., *Tullio Levi-Civita. Convegno internazionale celebrativo del centenario della nascita*, Roma, 17–19 dicembre 1973, N. 8. Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1975, 113–125

[5] C. Cattani, Marcolongo e la volgarizzazione della relatività. *Rivista di storia della scienza* (2) **4** (1996), 99–144

[6] C. Cattani, Levi-Civita e la nascita della scuola italiana di relatività. In W. Di Palma (a cura di), *Cento anni di matematica. Anni del Convegno Mathesis Centenario 1895–1995.* Palombi, Roma, 1996, 213–228

[7] M. F. A. Da Silva, L. Herrera, F. M. Paiva, N. O. Do Santos, The Levi-Civita space-time. *Journal of Mathematical Physics* **36** (1995), 3625–3631

[8] A. Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik* **49** (1916), 769–822

[9] A. Einstein, M. Grossmann, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und eine Theorie der Gravitation. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **62** (1913), 225–261

[10] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique.* Hermann, Paris, 1969

[11] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1. London-New York, Cambridge University Press, 1973

[12] A. Kopff, *I fondamenti della relatività einsteniana.* Hoepli, Milano, 1923

[13] P. S. Laplace, Proof of the theorem, that the attractive force of a heavenly body could be so large, that light could not flow out of it. In *Allgemeine geographische Ephemeriden*, a cura di F. von Zach., vol. 4, I, Weimar, 1799

[14] T. Levi-Civita, U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica razionale*, 2 vols., Bologna, Zanichelli, 1923-1926. Ristampa: Bologna, Zanichelli, 3 vols., 1987-1989. Ristampa: *Lezioni di Meccanica Razionale e Complementi*, Ed. Compomat Srl, 3 vols., 2013

[15] T. Levi-Civita, *Fondamenti di meccanica relativistica.* Zanichelli, Bologna, 1928

[16] T. Levi-Civita, *Opere Matematiche.* Zanichelli, Bologna, 6 vols., 1954–1973

[17] T. Levi-Civita, Über Lorentz-Einstein starre Bewegungen, 1910. In [16], III, 157–161

[18] T. Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana, 1917. In [16], IV, 1–39

[19] T. Levi-Civita, Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein, 1917. In [16], IV, 47–58

[20] T. Levi-Civita, Realtà fisica di alcuni spazi normali di Bianchi, 1917. In [16], IV, 75–88

[21] T. Levi-Civita, Statica einsteniana, 1917. In [16], IV, 59–73

[22] T. Levi-Civita, ds^2 einsteniani in campi newtoniani, 1917–1919. In [16], IV, 89–186

[23] T. Levi-Civita, La teoria di Einstein e il principio di Fermat, 1918. In [16], IV, 187–196

[24] T. Levi-Civita, Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova meccanica, 1919. In [16], IV, 197–216

[25] T. Levi-Civita, L'ottica geometrica e la relatività generale di Einstein, 1920. In [16], IV, 265–286

[26] T. Levi-Civita, Prefazione, in A. Einstein, *Sulla teoria speciale e generale della relatività.* Zanichelli, Bologna, 1921

[27] T. Levi-Civita, *Questions de mécanica clàsica i relativista.* Institut d'Estudios Catalans, Barcelona, 1922; Italian transl. Zanichelli, Bologna, 1924; German transl. Springer, Berlin, 1924

[28] T. Levi-Civita, *The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors).* London/Glasgow, Blackie, 1927

[29] T. Levi-Civita, Sulla nozione di intervallo fra due avvenimenti: primo approccio alla teoria della relatività, 1936. In [16], V, 45–65

[30] S. Linguerri, R. Simili, *Einstein parla italiano. Itinerari e polemiche.* Pendragon, Bologna, 2008

[31] K.-H. Lotze, S. Simonato, Henry Cavendish on Gravitational Deflection of Light. *Annalen der Physik* **534**, (2002), 1–5

[32] M. A. H. Mac Callum, Editorial note to: T. Levi-Civita, The physical reality of some normal spaces of Bianchi, and to: Einstenian ds^2 in Newtonian fields. IX: The analog of the logarithmic potential. *General Relativity and Gravitation* **43** (2011), 2297–2360

[33] G. A. Maggi, Esposizione compendiosa dei principii sostanziali della nuova teoria della relatività generale. *Il Nuovo Cimento* (6) **11** (1921), 5–33

[34] G. Maltese, The late entrance of relativity into Italian scientific community (1906–1930). *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences* **31** (2000), 125–173

[35] R. Marcolongo, Sugli integrali delle equazioni dell'elettrodinamica. *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (5) **15**, 1 (1906), 344–349

[36] R. Marcolongo, La teoria della relatività in senso stretto. *Rendiconti Seminario Matematico della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma. 1918–1919* **5** (1920), 55–76

[37] R. Marcolongo, I fondamenti analitici della teoria generale della relatività e le equazioni del campo gravitazionale. *Rendiconti Seminario Matematico della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma. 1918–1919* **5** (1920), 55–76

[38] R. Marcolongo, *Relatività.* Principato, Messina, 1921

[39] H. Minkowski, Raum und Zeit, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **18** (1909), 75–88

[40] H. Minkowski, *Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik, mit einem Einführungswort von Otto Blumenthal.* Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1910

[41] H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. *Mathematische Annalen* **68** (1910), 472–525

[42] C. W. Misner, K. S. Thorpe, J. A. Wheeler, *Gravitation.* Freeman and Company, San Francisco, 1973

[43] P. Nastasi, R. Tazzioli (a cura di), *Aspetti scientifici e umani nella corrispondenza di Tullio Levi-Civita (1873–1941)*, Quaderni Pristem, n. 12. Università Bocconi, Eleusi, Palermo, 2000

[44] P. Nastasi, R. Tazzioli (a cura di), *Aspetti di Meccanica e di Meccanica applicata nella corrispondenza di Tullio Levi-Civita (1873–1941)*, Quaderni Pristem, n. 14. Università Bocconi, Eleusi, Palermo, 2003

[45] P. Nastasi, R. Tazzioli, Toward a Scientific and Personal Biography of Tullio Levi-Civita (1873-1941). *Historia Mathematica* **32** (2005), 203–236

[46] P. Nastasi, R. Tazzioli, Tullio Levi-Civita. *Lettera matematica Pristem*, **57–58** (2006)

[47] I. Newton, *Opticks: Or, a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light* (a cura di W. e J. Innys). London, 3rd ed., 1721

[48] A. Palatini, Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi. *Il Nuovo Cimento* **14** (1917), 12–54

[49] W. Rindler, *La Relatività Ristretta*. Cremonese, Roma, 1971

[50] K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte K. Preussische Akademie Wiss. Berlin* (1916), 189–196

[51] R. Siegmund-Schultze, *Rockefeller and the Internationalization of mathematics Between the Two World Wars*. Birkhäuser, 2001

[52] R. Tazzioli, *From differential geometry to relativity. Levi-Civita's lectures on the absolute differential calculus, 1925–1928*. European Mathematical Society, Berlin, forthcoming

[53] F. Toscano, *Il genio e il gentiluomo. Einstein e il matematico che salvò la teoria della relatività generale*. Sironi, Milano, 2004

LA TEORIA DI EINSTEIN E IL PRINCIPIO DI FERMAT.

Nota di T. LEVI-CIVITA.

1. — Preliminari.

Sia

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{0}^{3}{}_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

la forma quadratica che, secondo Einstein, congloba le misure dello spazio e del tempo.

Supposto che la variabile $x_0 = t$ si possa fisicamente interpretare come tempo, e che x_1, x_2, x_3 rappresentino coordinate di spazio, sarà $-(ds^2)_{dx_0=0}$, ossia

$$(2) \qquad dl^2 = -\sum_{1}^{3}{}_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k = \sum_{1}^{3}{}_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

la forma quadratica (definita positiva) che individua la metrica dello spazio ambiente.

Per l'interpretazione fisica, conviene tener distinti nel ds^2 i termini in dx_0, cioè in dt, scrivendo

$$(1') \qquad ds^2 = g_{00}\, dt^2 + 2\, dt \sum_{1}^{3}{}_i\, g_{0i}\, dx_i - dl^2 .$$

La forma quaternaria del secondo membro è indefinita [1]) e può assumere, secondo i casi, valori positivi, negativi o nulli.

Un sistema di differenziali $dx_0 = dt$, dx_2, dx_1, dx_3 definisce notoriamente una direzione (d) della varietà quadridimensionale. Si dice che (d) è *temporale, spaziale* o *di lunghezza nulla* secondochè ds^2 risulta positivo, negativo o nullo. L'ipo-

[1]) Più precisamente anzi, considerata (nell'intorno di un punto generico) come forma algebrica in dt, dx_1, dx_2, dx_3, è tale che, in ogni sua ridotta canonica (per trasformazioni lineari reali), *l'indice d'inerzia* (numero dei coefficienti negativi) *è tre.*

tesi che t, variando da sola, porga la misura del tempo implica in particolare che sia temporale la direzione

$$(dt \neq 0,\ dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0)\ .$$

Ne consegue $g_{00}\, dt^2 > 0$, il che giustifica la posizione

$$g_{00} = \mathrm{V}^2 \tag{3}$$

con V quantità reale avente le dimensioni di una velocità

Nel fenomeno cinematico del movimento di un punto, x_1, x_2, x_3 sono funzioni ben determinate di t, e ad ogni dt rimangono univocamente subordinati i differenziali delle altre tre variabili. Il postulato della relatività elementare che ogni movimento materiale segue con velocità inferiore a quella della luce si generalizza notoriamente assumendo che, per ogni punto materiale in moto, $ds^2 > 0$; mentre, per la propagazione della luce, si ha $ds^2 = 0$. Le equazioni del moto

$$x_i = x_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

definiscono, eliminando t, una linea dello spazio ambiente, cioè la traiettoria del moto; interpretate invece nello spazio a quattro dimensioni, definiscono la così detta *linea oraria* [1]).

Tenuta presente la specificazione qualitativa $ds^2 > 0$, la legge quantitativa che governa il moto di un punto materiale si compendia nel principio variazionale di Einstein:

$$\delta \int ds = 0\ , \tag{4}$$

per variazioni (delle coordinate e di t) nulle agli estremi. Con espressiva immagine geometrica si può dire: *La linea oraria*

[1]) Secondo Minkowski, Weltlinie, cioè *linea universale* [Cfr., in traduzione italiana dovuta al Prof. Gianfranceschi, l'articolo « Spazio e Tempo » nel vol. XVIII, 1909, di questo giornale, pag. 336]. La denominazione introdotta da Minkowski è stata, a vero dire, generalmente accettata. A me pare tuttavia preferibile prender norma dall'uso comune della cinematica elementare, in cui si chiama appunto linea oraria il diagramma nel piano (s, t) di un moto (su traiettoria qualsiasi) definito dall'equazione $s = s(t)$. Se il moto è definito dalle tre equazioni $x_i = x_i(t)$, si ha un analogo diagramma quadridimensionale, e non c'è ragione di designarlo con un vocabolo diverso.

d'un punto materiale è una geodetica temporale della metrica quadridimensionale [(1) *ovvero* (1')].

2. — Raggi luminosi — Principio relativistico — Principio di Fermat — Coincidenza in condizioni stazionarie.

L'applicazione formale della (4) al caso di una linea oraria di lunghezza nulla non può effettuarsi materialmente (portando il δ sotto il segno e procedendo col solito algoritmo del calcolo delle variazioni) in causa della singolarità conseguente all'annullarsi del ds. Però basta notoriamente un semplice cambiamento di parametro nelle equazioni differenziali equivalenti a (4) per far sparire ogni traccia di singolarità. In questo senso è perfettamente legittima la nozione di linee geodetiche di lunghezza nulla e si può assumere come postulato fondamentale dell'ottica geometrica nella teoria di Einstein l'enunciato di Hilbert [1]: *I raggi luminosi sono linee geodetiche di lunghezza nulla della metrica quadridimensionale* [(1) *ovvero* (1')].

Un altro criterio induttivo, a priori plausibile, per definire l'andamento dei raggi luminosi è di *associare alla equazione* $ds^2 = 0$ *il principio di Fermat* del minimo tempo di percorrenza fra due punti generici; ossia di assumere

$$\delta \int dt = 0\,, \tag{5}$$

intendendo dt legato a t, alle coordinate di spazio e ai differenziali di queste da $ds^2 = 0$. In proposito giova notare che, mentre nel principio geometrico quadridimensionale (4) vanno ritenute nulle agli estremi dell'intervallo di integrazione non soltanto le δx_i, ma anche δt, nella (5) va evidentemente soppressa quest'ultima condizione, la quale ridurrebbe la (5) stessa a pura identità. Del resto basta pensare al significato del principio per desumerne la precisa impostazione analitica. In-

[1]) *Die Grundlagen der Physik*, parte II, Göttinger Nachrichten, 1917.

tanto si deve riferirsi allo spazio a tre dimensioni x_1, x_2, x_3 (di elemento lineare dl), risguardando assegnati i punti di partenza e di arrivo, nonchè l'istante di partenza del segnale luminoso; e si tratta di cercare la via che minimizza la durata del tragitto $\int dt$ subordinatamente al vincolo differenziale $ds^2 = 0$. Questo implica $\delta ds^2 = 0$, che si può considerare come una relazione (differenziale del prim'ordine) fra δt, le variazioni (arbitrarie, ma nulle agli estremi) δx_i e i rispettivi differenziali $d\delta t$, $d\delta x_i$. Imponendo a δt di annullarsi in partenza, esso rimane univocamente determinato, lungo la curva che congiunge le posizioni estreme, in funzione delle δx_i. La (5) esprime, si può dire, che tale curva va determinata in modo che δt si annulli anche in arrivo, comunque si scelgano le δx_i (nei punti intermedi). La traduzione differenziale della (5) si ottiene come segue.

Ove si immagini la equazione $ds^2 = 0$ risoluta rispetto a dt, si ha

$$dt = f(t; x_1, x_2, x_3; dx_1, dx_2, dx_3),$$

essendo f funzione omogenea di primo grado rapporto a dx_1, dx_2, dx_3. In condizioni stazionarie, quando cioè i coefficienti del ds^2 non dipendono da t, anche f ne è esente, e il principio (5), sostituitovi f a dt, assume veste puramente geometrica, portando alle equazioni

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial dx_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

In generale è d'uopo far intervenire anche l'identità

$$\delta dt - \delta f = 0$$

e ricorrere al solito metodo dei moltiplicatori, sostituendo a (5) la condizione equivalente

$$\int [\delta dt + \lambda(\delta dt - \delta f)] = 0$$

con δt nulla ad uno solo degli estremi.

Se ne ricavano le equazioni differenziali

$$\begin{cases} d\lambda + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial t} = 0\,, \\ d\left(\lambda \dfrac{\partial f}{\partial d x_i}\right) - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad\qquad (i = 1, 2, 3)\,, \end{cases}$$

colla condizione $\lambda + 1 = 0$ a quello dei due estremi in cui δt rimane arbitraria. Per $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$, la prima equazione differenziale, congiunta alla condizione ai limiti, porge $\lambda = -1$, sicchè si ritrovano, come è necessario, le equazioni del caso stazionario.

Ho già avuto occasione di valermi del principio di Fermat in condizioni statiche [1]), quando cioè non soltanto tutti i coefficienti del ds^2 sono indipendenti da t, ma inoltre si annullano i termini rettangoli in dt ($g_{0i} = 0$). Il Weyl [2]) ha in seguito notato che, in tali condizioni, c'è sostanziale equivalenza fra i due criteri (di Hilbert e di Fermat). La verificazione del Weyl non è in verità complicata, ma richiede comunque qualche passaggio formale. *Mi propongo di stabilire* (più generalmente e con semplicità anche maggiore) *l'equivalenza, per ogni metrica stazionaria, dei due principi d'ottica geometrica: geodeticità (quadridimensionale), minimo tempo.*

3. — **Dimostrazione.**

Come già abbiamo accennato, conviene considerare le geodetiche di lunghezza nulla derivanti per via di limite dalle geodetiche temporali ($ds > 0$). Per queste, ove si designi con c una costante arbitraria da identificarsi colla velocità

[1]) « Statica einsteiniana ». *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, vol. XXVI, 1° sem. 1917, p. 470.

[2]) « Zur Gravitationstheorie », *Ann. der Physik*, B. 54, 1917, pagine 127-128.

della luce in assenza d'ogni circostanza perturbatrice, si suol porre

$$(6)\qquad \dot{x}_i = \frac{d\,x_i}{d\,t} \quad (i = 1, 2, 3) \quad , \quad v^2 = \frac{d\,l^2}{d\,t^2} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, \dot{x}_i\, \dot{x}_k\,;$$

$$(7)\qquad \mathrm{L} = c\,\frac{d\,s}{d\,t} = c\,\sqrt{\mathrm{V}^2 + \sum_{1}^{3}{}_i\, g_{0i}\, \dot{x}_i - v^2}\,,$$

la funzione L ammettendo derivate parziali finite (perchè è escluso che si annulli il ds e quindi la quantità sotto il radicale).

La (4) può essere scritta

$$(4')\qquad \delta \int \mathrm{L}\, dt = 0\,.$$

La variazione, fatta rispetto alle coordinate x_1, x_2, x_3, porta classicamente alle equazioni di Lagrange

$$(8)\qquad \frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,\mathrm{L}}{\partial\,\dot{x}_i} - \frac{\partial\,\mathrm{L}}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Data la provenienza di (4′) da (4), bisogna trattarvi t alla stregua delle coordinate di spazio e quindi sottoporlo anch'esso a variazione (nulla agli estremi). Ciò non porta però ad alcuna nuova condizione. Si ha infatti, dopo ovvia integrazione per parti

$$\frac{d}{d\,t}\left(\sum_{1}^{3}{}_i\, \frac{\partial\,\mathrm{L}}{\partial\,\dot{x}_i}\, \dot{x}_i - \mathrm{L}\right) + \frac{\partial\,\mathrm{L}}{\partial\,t} = 0\,,$$

che è necessaria conseguenza delle (8).

Nell'ipotesi, caratteristica del caso stazionario, che L non contenga esplicitamente t, se ne ricava l'integrale

$$(9)\qquad \mathrm{L} - \sum_{1}^{3}{}_i\, \frac{\partial\,\mathrm{L}}{\partial\,\dot{x}_i}\, \dot{x}_i = \mathrm{E}\,,$$

dove la costante E è interpretabile come energia totale del punto mobile [1]).

[1]) Cfr., oltre alla già citata « Statica einsteiniana » (pagine 465-468), la nota « ds^2 einsteiniani in campi newtoniani ». I. « Generalità e prima approssimazione », Ibidem, 2° semestre 1917, pag. 309.

Moltiplicando per L, il primo membro può essere scritto

$$\frac{1}{2} L^2 + \frac{1}{2} \left(L^2 - \sum_1^3{}_i \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right).$$

In virtù della (7), L^2 è un polinomio di secondo grado in $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$: esso si presenta già scisso in tre addendi omogenei dei gradi rispettivi 0, 1, 2. Per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, sparisce il termine lineare dalla differenza $L^2 - \sum_1^3{}_i \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i$, la quale si riduce a $c^2(V^2 + v^2)$. Con ciò la (9), moltiplicata per L, porge

$$\frac{1}{2} L^2 + \frac{1}{2} c^2 (V^2 + v^2) = E\,L. \tag{9'}$$

Il primo membro è essenzialmente positivo, anzi $\geq \frac{1}{2} c^2 V^2$ (che è da ritenersi dotato di limite inferiore non nullo nel campo che si considera). Il prodotto E L *può così risguardarsi quale funzione delle x e delle $\dot{x}$, la quale rimane regolare e diversa da zero, anche quando* L *converge a zero;* in tale ipotesi la costante E tende manifestamente all'infinito.

D'altra parte, come già rilevai nella citata nota sulla statica einsteiniana, per tutti i movimenti cui compete una medesima energia totale E, si può sostituire alla (4'), in cui si suppone che δt si annulli agli estremi dell'intervallo di integrazione, un principio analogo che presenta sul primo il vantaggio di non richiedere più la detta condizione. All'uopo basta notare che, per δt nulla agli estremi, $\delta \int dt = 0$, e, per conseguenza, la (4') equivale a $\delta \int (L - E)\, dt = 0$, od anche, per $E \neq 0$, a $\delta \int \left(1 - \frac{L}{E} \right) dt = 0$; infine che, in quest'ultima, si può lasciar cadere il vincolo che δt si annulli agli estremi, perchè, portando il δ sotto il segno e applicandolo a dt (in quanto compare sia esplicitamente, sia pel tramite delle $\dot{x}$), si ha, materialmente,

$$-\frac{1}{E} \int \delta\, dt \left(L - E - \sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right),$$

che si annulla in virtù della (9).

Rimane dunque acquisito che, per un assegnato valore (non nullo) di E, le equazioni del moto si possono, *senza alcun vincolo relativo a* δt, compendiare nella formula

$$\delta \int \left(1 - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{E}}\right) dt = 0 . \tag{10}$$

La funzione sotto il segno può scriversi $1 - \frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{E\,L}}$, donde apparisce, avuto riguardo al rilevato comportamento del denominatore E L, che essa si mantiene regolare e tende all'unità, nell'ipotesi che L converga a zero. Ora è appunto tale ipotesi che fa passare dai moti materiali al caso limite della propagazione luminosa. Attesa la regolarità, il passaggio al limite può essere invertito cogli operatori $\delta \int$, e così la (10) dà luogo al principio di Fermat

$$\delta \int dt = 0 ,$$

c. d. d.

4. — Complementi geometrici.

Ad ogni direzione (d) dello spazio quadridimensionale (t, x_1, x_2, x_3), cioè ad ogni sistema di incrementi (dt, dx_1, dx_2, dx_3) si può ovviamente far corrispondere un vettore (velocità) **v** dello spazio fisico di elemento lineare dl, con che si intende, in modo preciso, dello spazio euclideo tangente (nel punto generico, a partire dal quale si considerano gli incrementi suddetti).

Assumeremo per sistema controvariante di questo vettore, rispetto alla metrica (2), i rapporti

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

Attribuendo loro la forma

$$\frac{dx_i}{dl}\frac{dl}{dt},$$

si mettono in evidenza i parametri di direzione $\frac{dx_i}{dl}$, e perciò il fattore positivo $\frac{dl}{dt}$ misura la lunghezza del vettore. Riportandoci alla posizione (6), abbiamo per il quadrato di tale lunghezza

$$v^2 = \frac{d l^2}{d t^2} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, \dot{x}_i \dot{x}_k .$$

Un altro vettore **w**, funzione esclusivamente del posto e del tempo (soltanto del posto in condizioni stazionarie), si può far corrispondere alla terna g_{0i} (covariante rispetto a trasformazioni qualisivogliono delle sole coordinate di spazio), assumendo tale terna per sistema covariante del vettore. Allora, ove si designino con $a^{(ik)}$ i coefficienti della forma reciproca alla (2) e si ponga

$$w^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{(ik)}\, g_{0i}\, g_{0k} , \tag{11}$$

si ha in w la lunghezza e (per $w > 0$) nei rapporti $\frac{g_{0i}}{w}$ i momenti (sistema reciproco ai parametri) della direzione di questo vettore. Va notato che, se le coordinate spaziali x hanno le dimensioni di una lunghezza, i coefficienti a_{ik} del $d l^2$, e quindi i loro reciproci $a^{(ik)}$, sono puri numeri, mentre i coefficienti g_{0i} dei termini rettangoli in dt hanno le dimensioni di una velocità. Perciò il vettore **w** è interpretabile come velocità al pari di **v**. Tale conclusione — lo si constata ovviamente — rimane valida, anche lasciando indeterminate le dimensioni delle coordinate x_1, x_2, x_3.

Detto φ l'angolo di **v** con **w**, supposti per un momento entrambi diversi da zero, si ha, in base alla metrica (2),

$$\cos \varphi = \sum_{1}^{3}{}_{i}\, \frac{g_{0i}\, \dot{x}_i}{w\, v} ,$$

donde l'identità

$$v w \cos \varphi = \sum_{1}^{3}{}_{i}\, g_{0i}\, \dot{x}_i , \tag{12}$$

che sussiste anche se eventualmente si annullano v o w.

Tutto ciò premesso, in base alle (3), (6) e (12), l'espressione (1′) del $d s^2$ può essere scritta

$$ds^2 = dt^2 \left(\mathrm{V}^2 + 2 v w \cos \varphi - v^2 \right) .$$

Si rende così manifesto che la condizione $ds^2 = 0$, caratteristica della propagazione della luce, ne definisce la velocità v in funzione del posto e della direzione del raggio, nonchè del tempo, nel caso generale, in cui i coefficienti del ds^2, e con essi V, w e φ, dipendono da t.

Rappresentando con β e con p i rapporti (positivi entrambi e numeri puri) $\frac{v}{V}$ e $\frac{w}{V}$, si ha per β la equazione di secondo grado

$$\beta^2 - 2p \cos\varphi \, \beta - 1 = 0, \tag{13}$$

le cui radici hanno per prodotto -1, e sono quindi una positiva e l'altra negativa. Per il suo significato v dev'essere positiva, talchè la (13) la definisce *univocamente*.

Quando si annullano tutti i termini rettangoli in dt (caso statico), $w = 0$, quindi $\beta = 1$, e v coincide con V. In generale è $p > 0$, e il divario da V (fissato un posto e un istante) dipende dalla direzione del raggio, ossia dall'angolo φ che esso forma con **w**. Si ha ancora $v = V$ per ogni raggio perpendicolare a **w**. La (13) mostra poi ovviamente che i valori massimo e minimo di β si hanno in corrispondenza a $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$. Ciò è quanto dire che la massima velocità di propagazione

$$V\left(\sqrt{1 + p^2} + p\right)$$

ha luogo secondo **w**; la minima

$$V\left(\sqrt{1 + p^2} - p\right).$$

nella stessa direzione, ma in senso opposto.

Come si vede, all'infuori del caso statico, la propagazione della luce nello spazio fisico ha comportamento non soltanto anisotropo ma addirittura irreversibile.

VIII.

COME POTREBBE UN CONSERVATORE GIUNGERE ALLA SOGLIA DELLA NUOVA MECCANICA

« Rend. del Seminario mat. della Fac. di Sc. della R. Univ. di Roma, » vol. V (1918-19), pp. 10-28; trad. spagnola, « Revista Mat. Hispano-Americana », t. II (1920), pp. 107-115, 129-132, 169-176; trad. francese in « L'Enseignement mathématique », XXI (1920), pp. 5-28.

In politica non sono molti quelli che amano chiamarsi puramente e semplicemente conservatori, perchè conservatore si prende spesso quale sinonimo di misoneista. Questo pericolo non c'è evidentemente in scienza. Nessun ricercatore può essere misoneista, ma molti cultori di scienza possono, direi quasi debbono, essere conservatori per la stessa loro missione di custodire con gelosa cura un certo patrimonio intellettuale ben consolidato, e di vagliare con severo spirito critico ciò che importa variazione od alienazione del patrimonio stesso.

Sotto questo punto di vista posso ben onorarmi di parlare dinanzi a numerosi conservatori; e sarò doverosamente circospetto nel cercare di orientarne il pensiero verso la nuova meccanica, senza destare diffidenze con improvvise demolizioni. Mi propongo di mostrare, attraverso un paio di formule classiche, semplici e compendiose, come un legittimo desiderio di generalizzazione formale da un lato e di sintesi concettuale dall'altro, renda plausibili alcune modificazioni di leggi generali, quantitativamente lievissime, speculativamente grandiose, che hanno ricevuto in questi ultimi anni un assetto sistematico per opera di EINSTEIN, fornendo spiegazione esauriente di più esperienze, e specialmente di una celebre esperienza d'ottica, e di un fatto astronomico (lo spostamento del perielio di Mercurio) di fronte a cui restavano impotenti i vecchi e pur gloriosi schemi, nonostante i più vigorosi sforzi.

Ma di ciò vi intratteranno in seguito altri colleghi con più fervida e colorita parola. Io passo ad assolvere il mio còmpito introduttivo.

1. - Il principio di Hamilton.

Prendiamo le mosse dalle equazioni del moto di un punto materiale in un campo conservativo. Sia U il potenziale unitario. Le equazioni del moto, in coordinate cartesiane (riferite ad assi fissi) y_1, y_2, y_3, si scrivono

$$\text{(N)} \qquad \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

il punto sovrapposto indicando al solito derivazione rispetto al tempo t. Ove si designi con

$$dl_0^2 = \sum_1^3{}_i \, dy_i^2$$

il quadrato dell'elemento lineare (percorso dal mobile nel tempuscolo dt) e con v la velocità del mobile (in valore assoluto), sarà

$$v^2 = \frac{dl_0^2}{dt^2} = \sum_1^3{}_i \, \dot{y}_i^2 \, .$$

Posto

$$L = \frac{1}{2} v^2 + U \, ,$$

le (N) si possono notoriamente compendiare nella formula variazionale

$$\text{(H)} \qquad \delta \int L \, dt = 0 \, ,$$

che esprime il principio di HAMILTON.

Fissiamo un momento l'attenzione sulla (H). Essa implica un intervallo di integrazione (t_0, t_1) da fissarsi preventivamente ed arbitrariamente; ed è appunto il suo sussistere per variazioni δy_i delle y_i, nulle agli estremi e del resto arbitrarie, che equivale all'essere verificate le (N) nello stesso intervallo.

Questa l'accezione più semplice del principio di HAMILTON, nel quale non si fa variare t, si assume cioè $\delta t = 0$. Sono pur classiche varie generalizzazioni, nelle quali si sottopone anche t a variazione, libera o condizionata. Di una di queste generalizzazioni che rispettano l'equivalenza fra le (N) e la (H) parleremo tra un momento. Intanto notiamo che, se si cambiano comunque le coordinate, sostituendo alla terna cartesiana y_1, y_2, y_3 coordinate curvilinee qualsivogliono, o anche più generalmente tre parametri lagrangiani x_1, x_2, x_3, legati alle y_1, y_2, y_2 da relazioni, che possono involgere anche il tempo, regolari e invertibili nel campo che si considera,

$$(\mathrm{T}_3) \qquad x_h = x_h(y_1, y_2, y_3, t) \qquad (h=1, 2, 3),$$

ovvero, sotto forma risoluta rapporto alle y_i $(i=1, 2, 3)$,

$$(\mathrm{T}'_3) \qquad y_i = y_i(x_1, x_2, x_3, t) \qquad (i=1, 2, 3),$$

e si introducono queste espressioni nella L, essa diviene una funzione $L(x|\dot{x}|t)$ degli argomenti x_h, $\dot{x}_h$ $(h=1, 2, 3)$, t, quadratica (in generale non omogenea) nelle $\dot{x}$.

Inteso che per L si adotti questa espressione trasformata, la (H) seguita a sussistere rispetto ai parametri lagrangiani x, e dà luogo, eseguendo effettivamente la variazione, a tre equazioni differenziali equivalenti alle (N), che hanno la forma classica di LAGRANGE:

$$(\mathrm{M}) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_h} - \frac{\partial L}{\partial x_h} = 0 \qquad (h=1, 2, 3).$$

Questa forma presenta la notevole proprietà di essere invariante rispetto a qualsivoglia scelta di parametri lagrangiani x (combinazioni indipendenti delle y, involgenti eventualmente anche il tempo).

OSSERVAZIONE I (sulla nozione di equazioni invariantive).

La qualifica di invariante, di fronte a qualsiasi scelta, e quindi anche trasformazione delle x [di tipo (T_3)], testè attribuita alle equazioni del moto, non va presa in senso assoluto: nel senso cioè che le equazioni differenziali rimangano proprio inalterate (salvo un materiale scambio di simboli), comunque si scelgano le variabili, ma in senso relativo, cioè nella accezione più lata di invarianza subordinata ad una qualche funzione (o sistema di funzioni), *base* delle trasformazioni, su cui si opera direttamente la sostituzione imposta dal cambiamento di variabili. La base delle trasformazioni (T_3) per le equazioni dinamiche è evidentemente la L, unico elemento di cui occorre e basta procurarsi l'espressione esplicita

$$L(x|\dot{x}|t)$$

nelle nuove variabili x (e loro derivate $\dot{x}$). Facendo intervenire questo elemento ausiliario, la struttura delle equazioni (M) è poi sempre la stessa, qualunque siano le coordinate di riferimento.

OSSERVAZIONE II (sulla base comune a tutte le equazioni della fisica matematica).

Si noterà che è ancora in senso relativo (perfettamente analogo a quello testè dichiarato) che hanno carattere invariante le equazioni della fisica matematica rispetto a trasformazioni quali si vogliono di coordinate *non* involgenti il tempo. In un sistema di siffatte equazioni appariranno generalmente certi parametri fisici, assieme a loro derivate rispetto a coordinate di spazio e tempo. Orbene, in via assoluta, il sistema cambierà certo aspetto (almeno nella maggior parte dei casi), quando per esempio si sostituiranno alle coordinate cartesiane le coordinate polari. Tuttavia, se si assume come *base* il dl_0^2 (quadrato dell'elemento lineare dello spazio) da esprimersi volta per volta per mezzo delle coordinate x a cui si vuol riferirsi, con che si avrà in generale

$$(\varphi) \qquad dl_0^2 = \sum_{ik}^{3}{}_{1} a_{ik}\, dx_i\, dx_k ,$$

diviene possibile in ogni caso, facendo apparire anche la forma differenziale quadratica (φ), o, più esplicitamente, i suoi coefficienti a_{ik}, di attribuire al sistema di equazioni una forma che rimane materialmente la stessa comunque si scelgano le coordinate.

OSSERVAZIONE III. – *La base dinamica L implica la base geometrica dl_0^2.*

Dalle (T_3) si ha, per un generico movimento, derivando rapporto a t,

$$\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\dot{x}_k .$$

D'altra parte, dalle (T_3) stesse, considerate come formule di trasformazione di coordinate, in cui t appare come semplice parametro, si ha, differenziando,

$$dy_i = \sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\, dx_k .$$

La sostituzione materiale di quest'ultime in $dl_0^2 = \sum_{1}^{3}{}_{i} dy_i^2$ dà luogo ad una forma differenziale quadratica, testè compendiosamente designata con (φ).

L'analoga sostituzione delle $\dot{y}_i$ in $L = \frac{1}{2}\sum_1^3{}_i\,\dot{y}_i^2 + U$ porge ovviamente un risultato del tipo

$$L_2 + L_1 + L_0\,,$$

essendo $L_2 = \frac{1}{2}(dl_0^2/dt^2)$ di secondo grado, L_1 di primo grado nelle $\dot{x}$, e L_0 funzione soltanto delle x e di t.

Di qua apparisce che la base dinamica L implica, per ogni speciale scelta di coordinate, la conoscenza dei tre addendi L_2, L_1, L_0, ossia equivale al complesso di tre basi:

1) una forma quadratica che, a meno del fattore $1/2\,dt^2$ (costante rispetto alle coordinate x), è la stessa base geometrica (φ);

2) una forma lineare L_1 [e per essa tre coefficienti, analoghi ai sei a_{ik} di (φ)];

3) una funzione $L_0(x\,|\,t)$ (che è in fondo un decimo ed ultimo coefficiente della L).

Si potrebbero di qua ricavare alcune conseguenze. A noi basterà ritenere che la base geometrica è in ogni caso inclusa nella dinamica (non viceversa).

2. - Equiparazione di t alle coordinate di spazio nell'algoritmo variazionale. Varietà analitica V_4. Locuzioni quadridimensionali.

Ovvia conseguenza delle equazioni (M) di Lagrange si è l'identità

$$\frac{d}{dt}\left\{L - \sum_1^3{}_i\,\frac{dL}{d\dot{x}_i}\,\dot{x}_i\right\} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0\,.$$

Ciò posto, si immagini di attribuire, nell'intervallo (t_0, t_1), anche alla variabile indipendente t una variazione δt nulla agli estremi e del resto arbitraria. Dacchè, per questo fatto, le x_i rimangono inalterate, mentre le $\dot{x}_i = dx_i/dt$ subiscono gli incrementi

$$\partial\dot{x}_i = -\,\dot{x}_i\,\frac{d\,\delta t}{dt}\,,$$

si riconosce immediatamente che il contributo proveniente dalla variazione di t nella (H), ossia

$$\int_{t_0}^{t_1} L\,\delta\,dt + \int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\frac{\partial L}{\partial t}\,\partial\delta t + \sum_1^3{}_i\,\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\,\partial\dot{x}_i\right\}\,,$$

può, con un'ovvia integrazione per parti, essere posto sotto la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\,\delta t\left\{\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{d}{dt}\left(L-\sum_1^3{}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\right\},$$

che va a zero, in virtù delle (M), per quanto abbiamo testè rilevato.

Si possono pertanto, nel principio variazionale (H), trattare alla stessa stregua le coordinate di spazio x_1, x_2, x_3 e anche la t.

Consideriamo, per semplice convenienza di linguaggio, la varietà a quattro dimensioni V_4 corrispondente ai quattro parametri x_i, t, varietà a quattro dimensioni in cui vengono a trovarsi rappresentati simultaneamente lo spazio ed il tempo.

Una terna di equazioni

$$x_i = x_i(t) \qquad (i=1, 2, 3),$$

ossia, nella interpretazione cinematica, un movimento, dà luogo ad una curva di V_4, e reciprocamente. Una tale curva si chiama *linea oraria*, come ovvia generalizzazione del diagramma piano con cui (portando in ascisse i tempi e in ordinate gli spazi percorsi) si suol rappresentare l'andamento del moto sopra una traiettoria prestabilita. Adottando questa locuzione, si può dire che curve integrali delle equazioni (M) sono tutte e sole le orarie di V_4, per cui, rimanendo fissi gli estremi, si annulla la variazione dell'integrale.

$$\int L\,dt\,.$$

3. - Il carattere invariantivo del principio di Hamilton non è riferibile alle V_4.

La più generale trasformazione di parametri in V_4 comprende ovviamente tre equazioni del tipo (T_3), con cui si sostituiscono alle coordinate cartesiane y_1, y_2, y_3 tre loro combinazioni indipendenti x_1, x_2, x_3, involgenti anche t; e inoltre una quarta con cui si sostituisce al tempo t un'ulteriore combinazione $x_0(y_1, y_2, y_3, t)$ (indipendente dalle tre precedenti): questo nuovo parametro x_0 si chiama talora *tempo locale*, perchè dipende non solo dall'originario tempo, ma anche dal posto. Lo schema di una (T_4) è così

$$(T_4) \qquad \begin{cases} x_0 = x_0(y_1, y_2, y_3, t)\,, \\ (T_3)\,. \end{cases}$$

Finchè si assume L per base, la forma dell'integrale $\int L\,dt$ non ha evidentemente carattere invariantivo di fronte ad una (T_4), venendo in generale sostituito il dt con una espressione lineare nei differenziali di tutte quattro le variabili x. Si potrebbe cercare di sostituire alla base L qualche cosa di più generale; allora sarebbe possibile raggiungere l'intento, ma in modo complesso e infecondo, perdendo in semplicità concettuale e formale ben più di quanto si guadagni in generalità.

Non è invece difficile arrivare ad una forma espressiva, invariante di fronte ad ogni (T_4), riguardando il principio di HAMILTON come un risultato d'approssimazione, così grande, ben inteso, da non essere avvertibile il divario fra esso e l'ipotetico principio rigoroso nelle applicazioni correnti, non solo tecniche, ma anche astronomiche. Una tale circostanza si presenta manifestamente, qualora i termini correttivi abbiano, rispetto agli omologhi della teoria ordinaria, un ordine di grandezza non superiore al centomilionesimo (10^{-8}).

Ecco una concreta realizzazione di questo criterio.

4. - Forma einsteiniana del principio di Hamilton.

Indichiamo con c una velocità costante, assai grande di fronte alla massima raggiunta nei movimenti di cui intendiamo occuparci. In modo preciso supponiamo che i due puri numeri

$$\frac{v^2}{c^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{U}{c^2}$$

siano entrambi trascurabili di fronte alla unità.

A questo proposito notiamo che una tale circostanza si presenta effettivamente, per c comparabile colla velocità della luce, non soltanto per gli ordinari problemi di moto terrestre, ma anche in meccanica celeste. Per rendersene conto, basta supporre che v sia una velocità planetaria e U il potenziale newtoniano che la determina, con che esso U (nel campo del moto del pianeta) ha notoriamente lo stesso ordine di grandezza di v^2.

Come ordine di grandezza di v, si può assumere 30 km al secondo, che conviene al moto orbitale terrestre. Essendo, in cifra tonda $c = 300\,000$ km/sec, si avrà $v/c \sim 10^{-4}$, e quindi

$$\frac{v^2}{c^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{U}{c^2} \sim 10^{-8}\,.$$

Ciò premesso, cominciamo coll'osservare che, dovendo annullarsi δt agli estremi dell'intervallo di integrazione,

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} dt = 0\,,$$

talchè si può sostituire a L come funzione integranda nella (H)

$$c^2 - L = c^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{U}{c^2}\right).$$

Entro parentesi, i termini $-\frac{1}{2}(v^2/c^2)$, $-U/c^2$, pur essendo trascurabili di fronte all'unità, sono essenziali perchè il principio variazionale non si riduca all'identità. Però termini d'ordine superiore si potranno senz'altro trascurare nell'approssimazione convenuta. Sarà quindi lecito scrivere

$$c^2 - L = c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2U}{c^2}} = c\sqrt{c^2 - v^2 - 2U}\,,$$

e con ciò il principio di HAMILTON che, per l'osservazione precedente, è equivalente a $\delta\int(c^2 - L)\,dt = 0$, può, omettendo il fattore costante c e scrivendo dl_0^2/dt^2 al posto di v^2, essere sostituito da

$$\delta\int\sqrt{c^2 - \frac{dl_0^2}{dt^2} - 2U}\,dt = 0\,,$$

ossia, ponendo

$$ds^2 = (c^2 - 2U)\,dt^2 - dl_0^2\,, \tag{D}$$

da

$$\delta\int ds = 0\,. \tag{H$'$}$$

Dacchè, con referenza a coordinate cartesiane, il dl_0^2 vale $\sum_1^3{}_i\, dy_i^2$, il ds^2 testè introdotto è una forma differenziale quadratica quaternaria; indefinita, perchè (pur con valori reali e infinitesimi di dt, dy_1, dy_2, dy_3) è suscettibile di assumere determinazioni sia positive che negative. Con tutto ciò *va ritenuto che, nell'ambito dei fenomeni di moto che stiamo considerando, si ha sempre* $ds^2 > 0$.

Basta notare che, raccogliendo $c^2 dt^2$ a fattore e riponendo v^2 per dl_0^2/dt^2, si può scrivere

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right);$$

e ciò prova l'asserto, perchè la quantità in parentesi risulta certo positiva quando sussistono le limitazioni quantitative da cui abbiamo preso le mosse.

Ove si sostituiscano agli argomenti t, y_1, y_2, y_3 quattro loro combinazioni indipendenti quali si vogliono x_0, x_1, x_2, x_3 mediante una (T_4), il ds^2 conserva il carattere di forma quadratica nei differenziali delle variabili indipendenti. Cambieranno i coefficienti; si perderà in generale la forma ortogonale (assenza di termini rettangoli); ma comunque l'espressione esplicita rientrerà nel tipo

$$\text{(E)} \qquad ds^2 = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

i coefficienti $g_{ik} = g_{ki}$, in numero di dieci, essendo in generale funzioni delle x.

L'essenziale è che, *assumendo il ds^2 per base, la* (H′) *presenta manifestamente carattere invariante di fronte a qualsivoglia scelta di coordinate in V_4*. Ciò costituisce una rilevante superiorità di (H′) sopra l'originario principio di Hamilton.

5. - Interpretazione pseudo-geometrica.

La forma ds^2 è indefinita, come abbiamo osservato or ora, anzi ha per indice di inerzia 3 [1]. Con tutto ciò (per estensione analitica attraverso l'immaginario) nulla vieta di adoperare le locuzioni geometriche, di cui si fa abitualmente uso quando si tratta di una forma quadratica essenzialmente positiva, interpretandola come quadrato della distanza di due punti vicinissimi di una V_4.

Rimangono allora valide dal punto di vista analitico le definizioni e le equazioni (non le disuguaglianze) della geometria differenziale, salvo qualche riserva, proveniente dal fatto che, in geometria differenziale, per il carattere definito del ds^2, si può escludere sistematicamente che ds^2 si annulli, mentre con un ds^2 indefinito l'eventualità va contemplata e discussa.

---

[1] Numero dei coefficienti negativi in una (qualunque) espressione canonica.

Premesse queste avvertenze, si può ben dire che il ds^2 di EINSTEIN [definito da (D), o, in coordinate generali, da (E)] pone una determinazione metrica in V_4, e che *le geodetiche proprie di questa metrica* (curve che rendono stazionario l'$\int ds$ senza annullare il ds) *altro non sono che le curve orarie dell'originario problema meccanico.*

6. - Un'applicazione particolare della (H'). Trasformazioni di Lorentz.

Le equazioni del moto sotto l'originaria forma newtoniana (N) implicano, come ben si sa, moto uniforme per forza nulla o, ciò che è lo stesso (a meno di una inessenziale costante), per $U=0$. La (H), che equivale rigorosamente alle (N), definisce dunque per $U=0$ dei moti uniformi. Questa proprietà seguita a sussistere anche per la nuova forma einsteiniana (H') del principio di HAMILTON, che pur non è rigorosamente equivalente alle (N). Per rendersene conto, si osserva che per $U=0$, la (D) porge

$$(\mathrm{D}_0) \qquad ds_0^2 = c^2\,dt^2 - dl_0^2\,,$$

talchè, riferendosi a coordinate cartesiane e ponendo

$$L^* = \sqrt{c^2 - \sum_1^3{}_i\, \dot{y}_i^2}\,,$$

la (H'), che diviene

$$(\mathrm{H}'_0) \qquad \delta\int ds_0 = 0\,,$$

può essere scritta

$$\delta\int L^*\,dt = 0\,.$$

Le corrispondenti equazioni lagrangiane, per il fatto che L^* non dipende esplicitamente dalle y, dànno subito i tre integrali primi

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}_i} = \text{cost.} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

donde la costanza di tutte le $\dot{y}$, *c. d. d.*

Ciò posto, consideriamo una categoria particolare, ma molto importante di trasformazioni (T_4), così specificate. Dalla quaderna (t, y_1, y_2, y_3) si passa ad una nuova quaderna (t', y_1', y_2', y_3') per cui si conserva la forma (D_0) del ds_0^2: inteso questo nel senso che, in virtù delle formule di trasformazione, risulti identicamente

$$ds_0^2 = c^2\,dt^2 - \sum_1^3{}_i\, dy_i^2 = c^2\,dt'^2 - \sum_1^3{}_i\, dy_i'^2 .$$

La (H_0') ci assicura allora che, *anche nella nuova quaderna, interpretando t' come tempo e y_1', y_2', y_3' come coordinate cartesiane, il moto apparirà uniforme.*

Trasformazioni siffatte furono effettivamente costruite da Lorentz, sicchè si possono chiamare lorentziane: le designeremo brevemente con ($\wedge$).

Ne avremo prossimamente una bella illustrazione vettoriale dal prof. Marcolongo, il quale rilevò per il primo come, ponendo $\sqrt{-1}\,ct = y_0$, con che il ds_0^2 assume la forma euclidea $-\sum_0^3{}_i\, dy_i^2$, le trasformazioni di Lorentz lasciano invariata la forma $\sum_0^3{}_i\, dy_i^2$, sicchè (prescindendo qui ancora da un passaggio attraverso l'immaginario) sono sostanzialmente identiche ai « movimenti » di uno spazio euclideo a quattro dimensioni.

Chiudo la parentesi circa l'effettiva esistenza di queste speciali trasformazioni ($\wedge$), e segnalo un importante corollario. Ogni ($\wedge$) trasforma, come s'è detto, un generico moto uniforme in un nuovo moto pure uniforme; non si può tuttavia affermare che, per effetto della trasformazione, rimanga inalterata la velocità. Ma un caso almeno c'è, in cui questa circostanza si presenta, e concerne i movimenti che seguono colla velocità c (quella tale velocità costante, grandissima, che abbiamo originariamente introdotto per modificare in modo quantitativamente insensibile, ma teoricamente fecondo di conseguenze, la formula di Hamilton).

Infatti, per un moto che segua colla velocità c (rispetto ai parametri t, y_1, y_2, y_3) si ha evidentemente $c^2 = dl_0^2/dt^2$ e quindi

$$ds_0^2 = c^2\,dt^2 - dl_0^2 = 0 .$$

Attesa l'invarianza (non solo del ds_0^2, ma addirittura della speciale forma $c^2dt^2 - \sum_1^3{}_i\, dy_i^2$ di esso) quando si passa alle nuove variabili accentate con una trasformazione di Lorentz, si ha, anche pel movimento trasformato, $c^2dt'^2 - \sum_1^3{}_i\, dy_i'^2 = 0$, e quindi la velocità c, *c. d. d.*

7. - L'ottica geometrica nel suo aspetto più elementare.

Nella schematizzazione geometrica dei raggi luminosi si ammette, come nella meccanica newtoniana, un riferimento assoluto. Per rendere espressiva la rappresentazione, si immagina questo offerto da un ipotetico mezzo in quiete, che costituisce come il supporto dei fenomeni ottici: il così detto etere cosmico. Negli spazi privi di materia ponderabile la luce si propaga in linea retta con velocità costante c rispetto all'etere, o, ciò che è lo stesso, rispetto ad assi fissi: intendendo per fissi, immobili rispetto all'etere. c è dunque la velocità della luce quale apparisce ad un generico osservatore O, in quiete rispetto all'etere.

Consideriamo un solido C animato da moto traslatorio con velocità u, e un fascio di raggi paralleli propagantisi nello stesso senso del moto.

Rispetto all'osservatore O, il fenomeno luminoso si schematizza — lo abbiamo richiamato or ora — come un particolare moto uniforme dotato di velocità c.

Secondo i criteri della cinematica ordinaria, l'analoga velocità rispetto ad un osservatore O' solidale con C vale $c - u$.

Ora (per quanto, nell'ambito delle velocità realizzabili con corpi materiali, sia piccolo il rapporto u/c e ancora più il suo quadrato u^2/c^2, che solo è accessibile a effettivo controllo sperimentale) si può ritenere sicuramente acquisito, in seguito ad una classica esperienza di MICHELSON, ripetuta in seguito da altri fisici e recentemente, su nuove basi, dal prof. MAJORANA, che la velocità di propagazione è ancora c anche rispetto ad O'.

Per spiegare questa constatazione sperimentale, basta evidentemente che ciò che macroscopicamente apparisce come traslazione di un corpo C con velocità u, sia, in un più affinato stadio di misura, una trasformazione (Λ): risultando effettivamente dallo studio di queste trasformazioni che ogni ordinaria traslazione uniforme è pressochè confondibile con una (Λ) (a meno di un decimilionesimo, purchè sia $u/c \leqslant 10^{-4}$).

Rimangono pertanto rispettate la legge classica dell'ottica geometrica (che la propagazione sia rettilinea, uniforme, con velocità c), nonchè le famose esperienze cui poc'anzi alludevo, ove si ammetta che sia, anche per la propagazione della luce (come pel moto di un punto materiale in assenza di forze)

$$\delta \int ds_0 = 0 \quad \text{(moto uniforme)},$$

colla specificazione

$$ds_0^2 = 0 \qquad \text{(il che è quanto dire moto dotato di velocità } c\text{)};$$

e si risguardi d'altra parte il fenomeno della traslazione dei solidi come tenuissimamente diverso dall'ordinaria descrizione cinematica, sì da corrispondere ad una trasformazione (Λ). Ciò già ebbe sostanzialmente a spiegare il prof. CASTELNUOVO in una sua conferenza di alcuni anni or sono; ne riparlerà prossimamente il MARCOLONGO. A me basta l'aver rilevato che l'ottica geometrica, pur nella sua forma più schematica, porta — e non semplicemente per una ideologia matematica di maggiore generalità e agilità, ma per virtù d'esperienza — ad attribuire una importanza fondamentale alla forma quadridimensionale

$$(D_0) \qquad ds_0^2 = c^2\,dt^2 - dl_0^2\,.$$

8. - Riavvicinamento delle due conclusioni meccanica ed ottica. Ovvia induzione circa il valore numerico di c e circa l'ottica geometrica in un campo di forza.

Per quegli speciali movimenti che corrispondono a propagazione della luce nell'etere, in assenza di circostanze perturbatrici, funge da base la forma

$$c^2\,dt^2 - dl_0^2\,,$$

in cui la costante c ha un valore numerico ben determinato.

Per i moti usuali (velocità al più planetaria) e sotto l'azione di forze conservative — diciamo in presenza di masse assegnate — funge da base una forma

$$(D) \qquad ds^2 = (c^2 - 2U)\,dt^2 - dl_0^2\,,$$

in cui, da un lato la costante c è soltanto sottoposta alla restrizione qualitativa di essere abbastanza grande, e d'altro lato l'influenza delle masse modifica alquanto il coefficiente di dt^2. Se si aspira alla unità di concezione dei fenomeni fisici, si è ovviamente tratti ad ammettere che, *caeteris paribus*, una stessa forma differenziale ds^2 domini così il moto dei punti materiali come l'andamento dei raggi luminosi fungendo da base in entrambi i casi. Si dovrà perciò attribuire alla costante c, nel caso dinamico generale, lo stesso valore specifico che le compete nel fenomeno ottico particolare. Allora intanto, in assenza di circostanze perturbatrici, in particolare di masse a distanza sensibile, con che $U = 0$, il ds^2 meccanico si identifica effettivamente col ds^2 dell'ottica limite.

Di più, dacchè nel caso di $U = 0$ (cioè in assenza di masse a distanza sensibile) si è compendiata l'ottica geometrica, mercè l'intervento del ds_0^2, in due leggi che si presentano come limite di leggi dinamiche, si è condotti ad esperire l'estensione dello stesso criterio anche al caso in cui esistono masse ($U \neq 0$). La propagazione della luce sarà quindi retta in ogni eventualità dai postulati seguenti:

1) (Come per i moti materiali). Principio geodetico:

$$\delta \int ds = 0 .$$

2) $ds^2 = 0$, il che è quanto dire che si tratta di moti per cui il quadrato della velocità dl^2/dt^2 vale

$$c^2 - 2U = c^2\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) .$$

La velocità V risulta quindi leggermente diversa da c, ossia (a meno di termini assolutamente trascurabili) espressa da

$$V = c\left(1 - \frac{U}{c^2}\right) .$$

I due postulati si possono compendiare in un espressivo enunciato geometrico:

Nella nostra metrica convenzionale (D) *i raggi luminosi sono geodetiche di lunghezza nulla.*

9. - Incurvamento di raggi luminosi per l'azione di masse materiali.

La presenza della funzione U nel ds^2 fa ovviamente presumere che l'andamento dei raggi luminosi non sarà più rigorosamente rettilineo, come per $U = 0$.

Esplicitando le equazioni differenziali equivalenti al principio variazionale ed eliminando dt, mediante l'equazione $ds^2 = 0$, rimangono definiti i raggi, e, per integrazione, le curve secondo cui si atteggiano. Queste si trovano così caratterizzate in un modo quantitativamente preciso che ci è stato suggerito dalla rappresentazione matematica dei fenomeni.

Una conferma molto espressiva del passaggio dall'andamento rettilineo a quello curvilineo, per effetto di un campo di forza, ci è somministrata da considerazioni fisiche di tutt'altra natura. Ed ecco come.

Nei corpi radioattivi si trova immagazzinata una quantità enorme di energia: basta pensare per esempio che una anche esigua massa di radio è capace di irradiare per anni ed anni, senza sensibile modificazione, tanto calore da portare in ogni ora da 0° al punto di ebollizione una uguale massa d'acqua. Soltanto in un tempo lunghissimo (oltre 2500 anni pel radio, e, per altri elementi radioattivi, comparabile con la durata delle epoche geologiche) la provvista di calore tenderebbe ad esaurirsi. Per quanto la radioattività non sia una proprietà generale dei corpi, essa rende manifesto che (almeno in alcuni casi) la materia racchiude una enorme provvista di energia, e, sotto questa forma, la constatazione è generalizzabile per induzione ad ogni atomo di materia ponderabile. Può anzi farsi un apprezzamento quantitativo che conduce ad assumere come misura di questa energia mc^2, essendo m la massa della materia di cui si tratta. Questa energia intrinseca della materia risulta quindi di un ordine di grandezza ben altrimenti considerevole delle altre due forme di energia che si fanno intervenire in meccanica elementare, la cinetica $mv^2/2$ e la potenziale (o posizionale) dipendente dal posto che la massa m occupa in un assegnato campo di forza. Per quanto di gran lunga preponderante su queste due forme, la energia intrinseca può esser ignorata dall'ordinaria meccanica appunto per questo suo carattere intrinseco, cioè per il fatto che rimane, almeno sensibilmente, invariata di fronte ai fenomeni del moto.

Ammessa una volta la proporzionalità fra massa materiale ed energia, queste due entità fisiche divengono concomitanti: dove c'è materia nell'ordinario senso della parola, c'è anche energia, anzi (rispetto ai consueti apprezzamenti in kilogrammetri) molta energia, in causa del fattore c^2; e reciprocamente, dove c'è energia, è implicita la materia; materia sia pure così rarefatta da non essere avvertita con mezzi relativamente grossolani (come pesate o altre esperienze statiche), ma pur sempre dotata delle caratteristiche meccaniche fondamentali della materia quali la gravitazione (ossia l'attitudine a risentire l'attrazione newtoniana di altre masse) e l'inerzia.

Ciò posto, si rifletta che qualunque teoria *fisica* della luce (in cui l'analisi sia spinta al di là della semplice schematizzazione cinematica), sia che si tratti di teoria elastica o di teoria elettromagnetica, porta a risguardare i raggi luminosi come linee di flusso o, se si vuole, traiettorie dell'energia, propagantesi lungo essi con velocità c.

Data la precedente relazione di proporzionalità, ciò è quanto dire che lungo i raggi luminosi si ha anche flusso di materia. Certo, in proporzioni talmente ridotte da non giustificare l'antica spiegazione corpuscolare e da lasciar sussistere in tutte le sue conseguenze la teoria ondulatoria; comunque, flusso di materia. Ma questa risente l'attrazione newtoniana di masse poste nel campo, donde intanto l'effetto qualitativo dell'incurvamento dei raggi. Del resto, colle sole premesse testè dichiarate, si può passare addirittura al quantitativo e formare le equazioni differenziali dei raggi. Basta rilevare che, per un elemento generico della nostra tenuissima materia viaggiante lungo il raggio con velocità c (o assai prossima a c), valgono (trascurando in una prima approssimazione l'eventuale correzione da apportare a c) le relazioni

$$\frac{c^2}{\varrho}=\frac{dU}{dn}\,, \qquad \frac{dU}{db}=0\,,$$

dove n e b designano le (a priori incognite) direzioni della normale principale e binormale al raggio in un suo punto generico, e ϱ il raggio di curvatura in quel punto. Queste coincidono (in prima approssimazione) colle equazioni differenziali che si dedurrebbero dal principio variazionale combinato con $ds^2=0$.

10. - Correzione einsteiniana delle equazioni della fisica matematica. Relatività della prima maniera.

Le leggi dei fenomeni naturali, diciamo, per fissar le idee, di una data classe di fenomeni naturali (ad es. meccanica dei sistemi continui, elettromagnetismo, termodinamica), quali si trovano tradotte in equazione secondo le teorie classiche della fisica matematica, presentano tutte, come già si disse [n. 1, oss. II], carattere invariantivo rispetto a cambiamenti quali si vogliono di coordinate di spazio, semprechè si assuma il dl_0^2 spaziale come forma fondamentale, cioè come base di trasformazione.

In queste equazioni compare (a meno che non si tratti di fenomeni statici) anche il tempo t; ma la variabile t sta a sè, nè potrebbe essere mescolata alle altre in una eventuale trasformazione senza che venga meno il carattere invariantivo delle equazioni.

Sia, per esempio,

$$(\Omega) \qquad \Omega_1=0\,, \quad \Omega_2=0\,, \quad \ldots, \quad \Omega_m=0$$

il sistema che, secondo lo schema abituale, traduce in equazioni una determinata teoria fisica. Vi compariranno certi parametri $p_1, p_2, \ldots, p_n$

specifici della teoria, inoltre (almeno in generale) coordinate di spazio e tempo. Pensando il sistema riferito a coordinate generali x_1, x_2, x_3, vi compariranno ulteriormente i coefficienti a_{ik} del quadrato dell'elemento lineare espresso per mezzo delle x:

$$(\varphi) \qquad dl_0^2 = \sum_i^{3} {}_1 dy_i^2 = \sum_{ik 1}^{3} a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,.$$

Il sistema (Ω) esprime relazioni fisico-geometriche ed è quindi dotato di carattere invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate.

Permettetemi a questo proposito una breve digressione, che vi potrà in sulle prime apparire piuttosto oziosa, ma che è invece essenziale come avviamento analitico alla relatività generale.

Nelle (Ω) intervengono soltanto le a_{ik} e le loro derivate *prime*: ciò almeno vale per gli esempi più cospicui, ai quali possiamo limitare il nostro discorso. La struttura delle (Ω) non è perciò subordinata all'ipotesi che il dl_0^2 sia euclideo. Le (Ω) stesse sono interpretabili, senza richiedere alcuna modificazione formale, come l'estensione più spontanea, anzi (sotto certe restrizioni) l'unica possibile, delle ordinarie leggi fisiche ad uno spazio di natura metrica qualsiasi, avente cioè per quadrato dell'elemento lineare una forma differenziale quadratica definita

$$dl^2 = \sum_{ik\,1}^{3} a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

data a priori, e quindi in generale *non* euclidea, cioè *non* riducibile con opportuna scelta di variabili al tipo elementare $\sum_{i\,1}^{3} dy_i^2$.

Questa estensione poteva parere fino a ieri pura metafisica o almeno mediocre esercitazione matematica, perchè nulla consigliava di rinunciare all'ipotesi fondamentale, suggerita da intuizioni primordiali e maturata attraverso constatazioni sempre più affinate, che lo spazio in cui viviamo sia rigorosamente euclideo. Oggi non è più così. Vedremo anzi tra un momento quali opportunità di sintesi concettuale inducano a ricostruire la filosofia naturale su base più ampia, riservando, ben si intende il definitivo giudizio sulla ricostruzione a quando si potrà ritenere esauriente il numero e l'entità delle conferme che le porgono i fatti.

Torno ora alle (Ω), per richiamare la vostra attenzione sopra possibili loro modificazioni, al solito, abbastanza radicali nel concetto, ma tali da non alterarne sensibilmente il contenuto quantitativo nell'ambito finora sperimentato.

Lo scopo è di sostituire alle (Ω) altrettante equazioni

$$(\mathrm{R}) \qquad R_1 = 0\,, \quad R_2 = 0\,, \ldots, \quad R_m = 0\,,$$

identiche alle stesse (Ω) in condizioni statiche (debitamente specificate) e dotate più generalmente di carattere invariante rispetto a tutte le trasformazioni quaternarie di variabili indipendenti (non i soli cambiamenti di coordinate). Per raggiungere questo scopo, basta in ultima analisi assumere come base di trasformazione, in luogo del dl^2 spaziale ([2]), una (qualsiasi) forma quaternaria ds^2, la quale si riduca a $-dl^2$ per $dt = 0$.

Il modo per costruire effettivamente il sistema (R), cominciando dall'attribuire la forma più adatta all'(Ω) da cui si parte, è in ogni caso fornito con tutta facilità dai metodi del calcolo differenziale assoluto del Ricci (associati, ben si intende, a specifiche premesse di carattere fisico). Ma lasciamo la parte esecutiva, restringendoci ai passaggi concettuali. Supponendo che le originarie (Ω) si riferiscano allo spazio euclideo della fisica classica, come nuova base si può per esempio assumere la forma

$$ds_0^2 = c^2\,dt^2 - dl_0^2\,,$$

che, come abbiamo visto, domina l'ottica geometrica limite, cioè in assenza di circostanze perturbatrici.

Se così si fa, si rispecchia la così detta *relatività della prima maniera*, nella quale — importa notarlo — anche la dinamica del punto materiale va riformata con riferimento al ds_0^2, e non nel modo autonomo che già vi indicai, così spontaneamente suggerito dal principio di Hamilton.

Non posso passare sotto silenzio, per la sua importanza intrinseca e storica, il fatto notevolissimo che esiste un sistema (Ω), quello che regge i fenomeni elettro-magnetici nei mezzi impolarizzabili in quiete, per cui le equazioni (R), formate sulla base del ds_0^2 ottico, proprio si identificano con le originarie (Ω). Fu anzi questa specifica coincidenza che diede il primo impulso alla teoria della relatività, nel senso ristretto suaccennato, e che conferì impronta prevalentemente elettromagnetica alle prime esposizioni sistematiche della teoria.

Ma torniamo alla base di trasformazione.

Già in questa nostra rapida rassegna delle innovazioni suggerite dal desiderio di affrancarsi da un tempo assoluto nella dinamica del punto materiale, siamo stati condotti a sostituire al ds_0^2 dell'ottica-limite un ds^2 alquanto più generale

$$c^2\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) dt^2 - dl_0^2\,,$$

([2]) Dico genericamente dl^2 e non dl_0^2; perchè la precedente osservazione del testo autorizza a riferire le (Ω) ad uno spazio di natura metrica qualsiasi.

che varia da caso a caso in dipendenza dal campo di forza. Si potrebbe in ogni teoria fisica assumere come base un tale ds^2, in cui è tenuto conto di U, ossia in sostanza delle masse in presenza delle quali avvengono i fenomeni considerati.

E così sarebbe a priori prevedibile e risulterebbe quantitativamente precisata dalle equazioni (R) una influenza (che si sovrappone a quella eventualmente già contemplata dalle teorie ordinarie), certo assai piccola ma non rigorosamente nulla, del campo di forza entro cui si svolge la classe di fenomeni presi in esame.

Ma per una sintesi comprensiva di tutti i fenomeni, c'è ancora un ultimo passo da fare.

11. - Influenza di tutti i fenomeni fisici sulle misure dello spazio e del tempo. Relatività generale.

Conviene generalizzare il criterio che ci ha condotto ad assumere come base dinamica e ottica il ds^2 quadridimensionale della formula (D), sulla natura del quale influisce essenzialmente la materia circostante (pel tramite del potenziale U). In linea speculativa, il fatto che la materia influisce fa pensare che non soltanto la materia, ma anche ogni altra circostanza fisica (moto, stato elettrico, sforzi locali, ecc.) possa esercitare una analoga influenza, modificando in misura tenuissima (sempre dell'ordine di U/c^2 al più, nelle ordinarie condizioni) *tutta* la struttura del ds^2 (non soltanto il coefficiente di dt^2). Ciò porta in particolare alla conseguenza (visto che, per $dt = 0$, il ds^2 diviene puramente spaziale) che anche lo spazio geometrico ambiente non rimarrà in generale rigorosamente euclideo, come fu sempre postulato finora in ogni concreta teoria di fenomeni fisici, ma se ne scosterà in modo vario secondo le influenze esterne. Notiamo per incidenza che (non in tre, ma in due dimensioni), si ha un esempio tangibile di variabilità dell'elemento lineare secondo le circostanze, considerando una membrana elastica.

Il legame fra la natura del ds^2, che congloba le misure dello spazio e del tempo, e il complesso dei fenomeni fisici costituisce il postulato qualitativo della relatività generale. La traduzione quantitativa è fornita dalle così dette equazioni gravitazionali di EINSTEIN, che sono naturalmente in numero di 10, quanti i coefficienti, *a priori* incogniti, del ds^2 riferito a coordinate generali [cfr. la (E) del n. 4].

Con questa veduta rimane stabilita un'intima interdipendenza fra tutti i fenomeni geometrici, cinematici e fisici. La geometria e la cinematica cessano di occupare un posto privilegiato fra le varie teorie fisiche, nel senso che lo spazio ed il tempo non sono più un semplice supporto immanente e intangibile dei fenomeni, ma ne subiscono l'influsso pel tramite del ds^2, alla cui natura è d'altra parte subordinato lo svolgimento dei fenomeni stessi.

Come la meccanica di NEWTON, introducendo la gravitazione universale, ha realizzato una interdipendenza generale fra il moto di tutti i corpi ponderabili, così, più generalmente, la nuova meccanica, mediante le equazioni delle singole teorie fisiche, lievemente modificate, e le equazioni gravitazionali, lega fra loro tutti i fenomeni naturali in uno schema unitario, il quale (assumendo per base lo specifico ds^2 einsteiniano che conviene al caso considerato) ha carattere invariantivo di fronte a tutte le trasformazioni dei quattro parametri indipendenti che complessivamente individuano posto e tempo.

X.

L'OTTICA GEOMETRICA E LA RELATIVITÀ GENERALE DI EINSTEIN

« Rivista d'Ottica e Meccanica di precisione », anno I, nn. 11-12 (1920), pp. 1-16.

Nei primi mesi del corrente anno si conobbero i risultati delle osservazioni istituite in occasione dell'eclisse del 29 maggio 1919, allo scopo di misurare l'incurvamento tenuissimo — diremo *deflessione*, seguendo gli astronomi inglesi — che, secondo la relatività generale di EINSTEIN, devono subire i raggi di luce provenienti dalle stelle quando passino nelle vicinanze del Sole.

La deflessione effettivamente constatata fu conforme alle previsioni della teoria, costituendone così una prova sperimentale, in certo senso anche più brillante, se non più decisiva, di quelle già offerte dalla spiegazione dell'esito negativo dell'esperienza di MICHELSON e dello spostamento secolare del perielio di Mercurio. In questi due ultimi casi si tratta infatti di render ragione di fenomeni già osservati (per quanto indarno investigati al lume degli ordinari principî di meccanica), mentre la deflessione dei raggi è un fatto nuovo, annunciato prima dalla teoria e poi suffragato dall'esperienza. Forse per questa ragione l'interesse suscitato nei competenti dalle memorabili scoperte dell'EINSTEIN (1), cominciò a diffondersi in tutti gli ambienti scientifici solo in seguito alla conferma astronomica dell'incurvamento dei raggi stellari; ed ebbe pronta ripercussione in un pubblico più largo.

---

(1) È doveroso il rilevare che EINSTEIN trovò la necessaria base matematica per la sua relatività generale nel calcolo differenziale assoluto, creato ed elaborato nell'ultimo trentennio dal Prof. G. RICCI, dell'Università di Padova. Un esempio altrettanto cospicuo di speculazioni astratte, divenute in un dato momento essenziali al progresso della filosofia naturale, si ha forse soltanto nella teoria delle coniche di Apollonio, che rese possibile la scoperta delle leggi di KEPLER.

Dacchè la questione rientra in certo senso nell'ottica di precisione, non è fuori di luogo informarne con qualche ampiezza i lettori di questa *Rivista*. Presupporremo in essi unicamente la conoscenza della meccanica classica, mirando a far intendere lo spirito del risultato finale e della sua deduzione quantitativa, senza intrattenerci sulle formule generali che racchiudono la teoria di EINSTEIN, nè cercare di surrogarle — impresa ardua e comunque non costringibile in poche pagine — con una volgarizzazione adeguata.

Parecchi scritti sono stati naturalmente dedicati all'argomento in libri e periodici: qualcuno avrò occasione di citarne; degli altri mi limito a segnalare l'eccellente memoria del PALATINI, *Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi* (« Nuovo Cimento », luglio 1917, pp. 12-54), da cui il presente articolo si differenzia perchè mira ad illustrare soltanto il fenomeno ottico col minimo sforzo.

I

RICHIAMI D'OTTICA GEOMETRICA SECONDO LO SCHEMA CLASSICO

1. - Generalità - Legge di rifrazione - Principio di Fermat.

In un mezzo trasparente, omogeneo, la luce si propaga notoriamente in linea retta con velocità costante. Nel caso dell'isotropia, cui esclusivamente ci riferiremo, la velocità è sempre la stessa in tutte le direzioni e costituisce quindi una costante caratteristica del mezzo. Per l'aria (e così sensibilmente per gli spazi interplanetari), questa costante vale in cifra tonda

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec},$$

ossia 300 000 km al secondo.

Se si tratta invece di mezzo eterogeneo, in cui l'indice di rifrazione n, che è poi l'inversa della velocità di propagazione, varia da punto a punto, allora i raggi non hanno in generale andamento rettilineo, ma sono incurvati secondo una legge che dipende dal modo di variare di n col posto, cioè dalla funzione $n(x, y, z)$, designandosi al solito con x, y, z coordinate cartesiane di un punto geometrico del mezzo.

Ecco quali considerazioni conducono a caratterizzare l'andamento dei raggi.

Si parte dal caso elementare di un mezzo illimitato che consta di due porzioni S_0, S, ciascuna separatamente omogenea, ma aventi due diversi indici di rifrazione n_0, n. Sia σ la superficie di separazione fra S_0 ed S. Entro S_0 ogni raggio ha andamento rettilineo; così pure entro S. Perciò, nel passare da un punto generico P_0 di S_0 ad altro punto, pure generico,

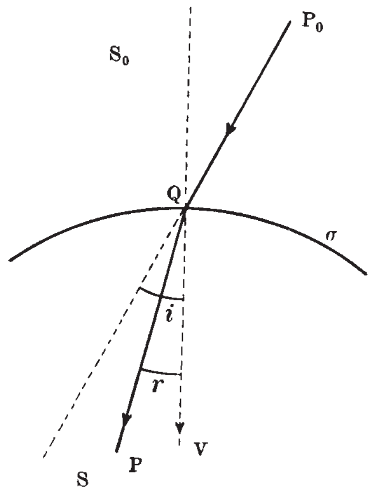

Fig. 1.

P di S, la luce segue un cammino che consta di due tratti rettilinei: P_0Q, da P_0 fino ad un certo punto Q (a priori incognito) di σ; e QP. Le leggi sperimentali della rifrazione, attraverso la superficie di separazione σ, ci dicono poi che i due segmenti P_0Q, QP non sono in generale per diritto, stanno però in un medesimo piano colla normale V alla superficie in Q, l'ubicazione di Q essendo tale da rendere soddisfatta la nota legge (di Cartesio)

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{n}{n_0},$$

in cui i ed r designano gli angoli formati dal raggio incidente e dal raggio rifratto rispettivamente colla normale ν alla superficie σ in Q (raggi e normale intendendosi orientati nel senso della propagazione).

Orbene, queste leggi geometriche sono incluse nel principio di FERMAT del minimo tempo. Se infatti si cerca quale sia il cammino fra P_0 e P lungo cui la luce si propaga nel tempo più breve, appare in primo luogo manifesto che, in ognuna delle due porzioni S_0 ed S (entro cui la velocità è costante), tale cammino deve essere rettilineo; sicchè tutto si riduce ad individuare la posizione di Q su σ in base alla condizione che risulti minima la somma

$$t = n_0\overline{P_0Q} + n\overline{QP}$$

dei due tempi che la luce impiega a percorrere il segmento P_0Q (colla velocità $1/n_0$) e il segmento QP (colla velocità $1/n$). In condizioni di minimo deve essere $\delta t = 0$, e un facile calcolo porta subito a riconoscere che ciò implica appunto le leggi di CARTESIO ([2]).

2. - Mezzo costituito da più strati omogenei - Caso limite Formula variazionale cui dà luogo il principio di Fermat.

Lo stesso avviene più generalmente se il mezzo consta di quantesivogliano, diciamo $m+1$, porzioni omogenee, essendo interposti, fra S_0 ed S, $m-1$ strati intermedi, separati l'uno dall'altro e dai due estremi dalle superficie successive $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$. Gli indici di rifrazione siano ordinatamente le costanti $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}, n$.

Per andare da P_0 a P, un raggio dovrà attraversare le varie σ in punti (*a priori* incogniti) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. Il principio di FERMAT esige in primo luogo che detto raggio sia costituito da una spezzata a tratti rettilinei $P_0Q_1, Q_1Q_2, \ldots, Q_{m-1}Q_m, Q_mP$. L'ubicazione dei punti Q sarà poi caratterizzata dalla condizione di rendere minima la durata totale del tragitto, cioè il tempo,

$$t = n_0\overline{P_0Q_1} + n_1\overline{Q_1Q_2} + \ldots + n_{m-1}\overline{Q_{m-1}Q_m} + n\overline{Q_mP}\,.$$

Anche qui si constata ovviamente che, per $\delta t = 0$, le rifrazioni successive ottemperano tutte alle leggi di CARTESIO. Perciò il principio di FERMAT, o anche soltanto quella parte di esso che esprime le condizioni

---

([2]) Cfr. per es. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle* (3ª ediz., Paris, Gauthier-Villars, 1909), T. I, Cap. VII, n. 150, pp. 220-223.

differenziali necessarie pel minimo, cioè la formula

$$\delta t = 0 ,$$

apparisce come una opportuna sintesi dei fatti osservati.

Il caso più interessante di un mezzo eterogeneo, in cui n varia con continuità da punto a punto, si può ovviamente desumere per via di limite dalle stratificazioni discrete ora contemplate. Basta per un momento immaginare, nel mezzo assegnato, un certo numero di superficie della famiglia

$$n(x, y, z) = \text{cost.} ,$$

abbastanza vicine perchè dall'una all'altra di esse la n si mantenga sensibilmente costante. In un mezzo ipotetico nel quale la n fosse rigorosamente costante entro i singoli strati, subendo invece bruschi salti attraverso le superficie che li separano, l'andamento del raggio sarebbe di spezzata poligonale retta dal principio di FERMAT. Ciò porta a passare al limite quando il numero degli strati cresce indefinitamente, ammettendo in conformità che seguiti ad essere valido lo stesso principio anche nel caso di un indice di rifrazione $n(x, y, z)$ variabile con continuità. Ove si indichi con ds l'elemento d'arco di un generico raggio di luce propagantesi nel mezzo, $n\,ds$ rappresenta manifestamente il tempuscolo impiegato dalla luce a percorrere ds, e il principio di FERMAT si traduce nel fatto analitico che la curva incognita, seguita dal raggio luminoso fra due punti prefissati P_0, P, deve corrispondere al minimo tempo di percorso, ossia minimizzare l'$\int_{P_0P} n\,ds$. Abbandonando come sopra le specificazioni qualitative addizionali, che si richiedono per un effettivo minimo, e limitandoci ad esprimere che si annulla la variazione prima, possiamo inferirne che l'*ottica geometrica di un mezzo in cui $n(x, y, z)$ è una funzione qualunque del posto* (continua e derivabile quanto occorre) *rimane sostanzialmente compendiata nella formula (variazionale*).

$$\delta \int n\,ds = 0 . \tag{1}$$

Da questa si ricaverebbero ovviamente (col solito algoritmo del calcolo delle variazioni) le equazioni differenziali (equivalenti) atte a fornire, per integrazione, la forma effettiva dei raggi (fra due punti qualisivogliono del mezzo). Ma è preferibile, specie in vista delle considerazioni che mi propongo di svolgere più avanti, di evitare il calcolo diretto, profittando invece di una nota equivalenza dinamica. Ed ecco quale.

3. - Traiettorie dinamiche nei problemi conservativi - Fascio corrispondente ad un assegnato valore della costante delle forze vive - Equazioni differenziali del fascio - Principio della minima azione.

Si consideri un punto materiale (x, y, z) il quale si muova sotto l'azione di una forza conservativa. Sia

$$U(x, y, z)$$

il potenziale di questa forza, unitario, cioè riferito all'unità di massa del punto di applicazione. Supposto che gli assi di riferimento sieno fissi (nel senso ordinariamente attribuito in meccanica a tale qualifica), si ha, per caratterizzare il moto del punto, la equazione (vettoriale) fondamentale della meccanica: accelerazione = forza unitaria, ossia, proiettando sui tre assi,

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{2}$$

il punto sovrapposto indicando derivazione rispetto al tempo t.

Le (2) ammettono notoriamente l'integrale (delle forze vive)

$$\frac{1}{2}v^2 - U = E, \tag{3}$$

in cui $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ rappresenta manifestamente il quadrato della velocità del mobile, e la costante delle forze vive E l'energia complessiva (di moto e di posizione) che gli compete per unità di massa.

Alle (2) equivalgono le così dette equazioni intrinseche che provengono dalla stessa equazione vettoriale sopra ricordata, proiettando sulla tangente alla traiettoria, sulla sua normale principale N e sulla binormale B.

La prima si può immaginare sostituita dalla relazione integrale (3). Le altre due, ricordando che le componenti dell'accelerazione secondo N (verso la concavità della traiettoria) e secondo B valgono rispettivamente v^2/ϱ (ϱ raggio di curvatura) e 0, si scrivono

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{dU}{dN}, \qquad 0 = \frac{dU}{dB}, \tag{4}$$

i secondi membri essendo visibilmente derivate di direzione: del potenziale U secondo le (*a priori* incognite) direzioni N e B.

Se si tien conto della (3), *si può risguardare* v^2 (introdotto originariamente come quadrato della velocità del mobile) *quale una funzione nota del posto*. D'altra parte, nei secondi membri delle (4), si può anche scrivere, al posto di U, $U+E$, ossia $\frac{1}{2}v^2$. Coll'accezione testè attribuita a v, scompare il tempo, e rimangono soltanto elementi geometrici. In altri termini, si ha il risultato della eliminazione di t dalle equazioni del moto, ossia le equazioni differenziali che definiscono tutte le possibili traiettorie, nel campo di forza derivante da un assegnato potenziale $U(x, y, z)$, sotto la forma

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dN} = \frac{v^2}{\varrho}\,, \qquad \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dB} = 0\,, \tag{4'}$$

essendo v^2 legata ad U dalla (3), con E costante arbitraria.

Immaginiamo in particolare di attribuire ad E un ben determinato valore, con che anche v^2 rimane univocamente individuato in funzione del posto. Le (4′) definiscono allora non più tutte le traiettorie, ma soltanto un loro *fascio*, chiamandosi appunto fascio il complesso delle traiettorie che corrispondono ad un medesimo valore della costante E. Le (4′) stesse sono in definitiva due equazioni differenziali del secondo ordine fra x, y, z; perciò la loro integrazione introduce quattro costanti arbitrarie, e un fascio consta in conformità di ∞^4 traiettorie. La totalità delle traiettorie, risultando dall'insieme di tutti i fasci viene invece a dipendere da cinque costanti: le quattro di un fascio generico e la E (che sono essenziali, cioè non riducibili a meno di cinque, escluso soltanto il caso di U costante, ossia di un campo di forza nullo).

Per il nostro scopo, cioè per evitare la trattazione diretta del problema generale dell'ottica geometrica, subordinando la ricerca dei raggi a quella di un fascio di traiettorie di un opportuno problema dinamico, è d'uopo ricorrere altresì al principio della minima azione.

Questo principio si traduce analiticamente in una equazione variazionale (esente da t) che, per un assegnato valore della costante E, compendia le equazioni del corrispondente fascio di traiettorie. Essa esprime che si annulla la variazione dell'azione relativa all'arco di traiettoria compreso fra due punti generici, l'azione essendo definita come

$$\int\sqrt{2(U+E)}\,ds\,,$$

esteso all'arco di traiettoria di cui si tratta ([3]).

([3]) APPELL, loc cit., Cap. XV, n. 220, pp. 543-544.

Abbreviando la scrittura, coll'usare qui ancora v^2 in luogo della sua espressione esplicita $2(U+E)$, si può in definitiva ritenere come equivalente alle (4) la formula variazionale

$$\delta\int v\,ds = 0\,. \tag{5}$$

4. - Identità fra raggi luminosi e fasci di traiettorie dinamiche Subordinazione di questi a quelle.

La (5) [risguardandovi v, come realmente è in base alle (3), quale funzione assegnata di x, y, z] differisce dalla (1) soltanto per lo scambio materiale di n in v. *Basta dunque sostituire* n *a* v *nelle* (4′) *per avere, sotto la forma esplicita:*

$$\frac{1}{2}\frac{dn^2}{dN} = \frac{n^2}{\varrho}\,, \qquad \frac{1}{2}\frac{dn^2}{dB} = 0\,, \tag{4''}$$

le equazioni differenziali dei raggi luminosi in un mezzo di indice n.

A questo criterio di equivalenza giova attribuire un'altra forma, che riescirà più agile, pur essendo meno definitiva in quanto, a differenza delle (4′), (4″), involge ancora la variabile ausiliaria t. Essa consiste nell'enunciato seguente:

I raggi luminosi in un mezzo di indice variabile $n(x, y, z)$ *costituiscono altrettante traiettorie dinamiche di un punto materiale soggetto ad una forza derivante dal potenziale* $\frac{1}{2}n^2$, *e precisamente, valendo per il problema dinamico l'integrale delle forze vive*

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}n^2 = \text{cost.}\,,$$

quel fascio di traiettorie, per cui è zero la costante del secondo membro, con che $v = n$.

La giustificazione è manifesta, perchè si riporta senz'altro alla coincidenza di (4′) e (4″) per $v = n$.

La regola, testè formulata, è molto comoda consentendo interessanti interpretazioni ottiche di risultati già bene acquisiti o addirittura familiari nella loro veste meccanica. Consideriamo per es. il caso tipico — che dà luogo in condizioni opportune al così detto miraggio di Monge [4] — di un mezzo in cui l'indice di rifrazione n varia soltanto colla quota z. Prendiamo anzi addirittura l'ipotesi (che sopra tutto ha interesse fisico)

---

[4] Veggasi ad es. A. Garbasso, *Il miraggio*, « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », t. LVII, 1906, pp. 1-57.

di una variazione lenta. Potremo in tal caso assumere, come espressione di n in funzione di z,

$$n = n_0\left(1 + \frac{z}{h}\right),$$

essendo n_0 ed h costanti, e di più quest'ultima (la quale è una lunghezza) tale che, nell'ambito dei valori di z che occorre prendere in considerazione, il rapporto z/h si possa trattare come quantità di primo ordine. Si ha allora, trascurando z^2/h^2 e designando con g la costante n_0^2/h,

$$\frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{2}n_0^2\left(1 + 2\frac{z}{h}\right) = \frac{1}{2}n_0^2 + gz\,.$$

I raggi si confondono pertanto con traiettorie di un problema dinamico in cui il potenziale $\frac{1}{2}n^2$ è funzione lineare di z. Questa dipendenza lineare del potenziale dalla sola z sta a dire che la forza è parallela all'asse delle z ed ha per valore (più precisamente per componente unitaria) g. Ci ritroviamo quindi (salvo il diverso valore numerico di g) nel caso elementare del moto dei gravi. I raggi (qualora non degenerino in rette) saranno altrettante parabole ad asse verticale, colla concavità nel senso della forza, cioè nel senso in cui cresce n, ecc.

II

ENERGIA E MATERIA COME ASPETTI DIVERSI DI UNA STESSA ENTITÀ FISICA

5. - Fenomeni radioattivi - Energia intrinseca della materia - Proporzionalità fra massa e energia e relativo coefficiente.

La teoria elettromagnetica della luce ci ha abituati a risguardare le vibrazioni luminose come distinte soltanto quantitativamente dalle oscillazioni elettriche.

Una identificazione anche più radicale di quantità fisiche considerate finora come indipendenti — materia ed energia — è stata suggerita, in modo spontaneo ma ancora timido, dai fenomeni radioattivi, e si è poi affermata vigorosamente come conseguenza quasi ineluttabile delle nuove concezioni teoriche. Si tratta anzitutto della constatazione sperimentale che nei corpi radioattivi si trova immagazzinata una enorme quantità di energia. Per es. un grammo di radio metallico è capace di sviluppare (nel corso delle sue trasformazioni) oltre tre milioni di grandi calorie. Questa energia, che si va svolgendo durante il processo di disintegrazione del radio, e così delle altre sostanze radioattive, deve necessariamente essere contenuta, in misura non prima sospettata, entro ogni atomo di queste sostanze. Siccome d'altra parte, dal punto di vista chimico, i corpi radioattivi (tranne l'alto peso atomico) non hanno caratteri speciali, così appare ragionevole l'induzione che ogni atomo di qualsiasi elemento racchiuda energia in misura altrettanto cospicua, voglio dire dello stesso ordine di grandezza. Un apprezzamento quantitativo fu suggerito per tutt'altra via dalla relatività (anche della prima maniera), la quale porta per forza di cose ad ammettere che la massa di un corpo varî (lievissimamente), oltrechè colla velocità, coll'energia che vi ha sede, e precisamente aumenti di $\Delta E/c^2$ se gli si comunica una energia addizionale ΔE.

Si è fatta così strada nella fisica moderna, e si può ritenere acquisita indipendentemente da ogni speciale costruzione teorica, la veduta che energia e materia siano necessariamente concomitanti (energia $=$ massa $\times c^2$); e si possono quindi risguardare come manifestazioni diverse di una stessa entità, la quale ci appare come materia ordinaria quando sia, per così dire, abbastanza concentrata, mentre si avverte, nelle forme più svariate, come energia quando non ci sono nuclei di condensazione.

Questo costituisce evidentemente un riconoscimento di equivalenza non meno grandioso di quello affermato dal primo principio della termodinamica. Esso si precisa nel dato quantitativo che c^2 è il fattore di proporzionalità fra la misura di una massa e quella della concomitante energia, e si designa perciò come *principio* o *postulato di proporzionalità*. Si può anche dirlo principio di identificazione (fra energia e materia), o anche di materializzazione dell'energia, o infine di inerzia e peso della medesima, le quali ultime denominazioni sono giustificate dal fatto che, ammessa la proporzionalità fra energia e massa materiale, l'energia stessa rimane materializzata e quindi dotata delle due qualità fondamentali che competono ai corpi ponderabili: inerzia, nonchè peso, cioè più generalmente attitudine a risentire l'azione gravitazionale degli altri corpi.

6. - Conseguenze ottiche.

Incurvamento dei raggi luminosi entro un campo di forza.

La schematizzazione cinematica, ricordata al § 1, basta per lo svolgimento dell'ottica geometrica; non così per l'ottica fisica. La spiegazione dei più complessi fenomeni di interferenza, di diffrazione, di polarizzazione, ecc., richiede notoriamente una teoria che penetri alquanto più addentro nell'analisi del fenomeno. La teoria ondulatoria, che risale ad HUYGENS e si affermò in modo definitivo con JOUNG e FRESNEL, fu costituita in modo soddisfacente da prima su modello elastico (desunto dalle vibrazioni dei corpi solidi), poi, per opera di MAXWELL, su modello elettromagnetico. Sia in questa teoria, oggi universalmente accettata, che nella anteriore teoria elastica, si identificano i raggi luminosi colle linee di flusso dell'energia, la velocità del flusso essendo quella sperimentalmente constatata per la luce. Se si associa a questa circostanza, già da tempo acquisita, il postulato di proporzionalità introdotto al n. precedente, si è necessariamente condotti ad assumere che, lungo ogni raggio luminoso, viaggia della materia: in quantità così esigua (stante la piccolezza del fattore di proporzionalità per cui ad un *erg* corrisponde appena la frazione $1/c^2 = 1/(9 \cdot 10^{20})$ di grammo) da risultare inapprezzabile nella maggior parte dei casi, ma pur sempre materia.

Questa nuovissima materializzazione dell'energia lascia sussistere il concetto di propagazione ondosa e la conseguente spiegazione dei fenomeni concreti; sicchè, dal punto di vista filosofico concilia la teoria ondulatoria con l'antica teoria dell'emissione.

Ma vediamo quali specifiche conseguenze discendono dal principio di proporzionalità, quando ci si pone nelle condizioni più opportune perchè si possa avvertire l'influenza della (diluitissima e velocissima) materia che percorre i singoli raggi.

Consideriamo all'uopo un mezzo trasparente nel quale (in assenza d'ogni azione perturbatrice) la luce si propaga colla velocità costante c. Supponiamo che questo mezzo sia sede di un campo di forza, e sia $U(x, y, z)$ il relativo potenziale. Un punto materiale libero che si muove in questo campo è soggetto unicamente alla forza derivante dal potenziale U e descrive quindi delle traiettorie che in generale non sono rette, ma curve, il raggio di curvatura in un punto generico essendo legato al valore di U (in quel punto) e alla velocità (pure in quel punto) del mobile dalla prima delle (4). Essa mostra tra altro, come è del resto evidente per intuizione, che *caeteris paribus*, la traiettoria è tanto meno incurvata quanto maggiore è la velocità. Orbene, se è vero che i raggi luminosi sono effettivamente traiettorie di particelle materiali (sia pure così infime, da essersi finora rivelate all'esperienza — e all'esperienza ottica che è la più squisita — con sole caratteristiche energetiche), ciascuna di queste particelle deve pur obbedire alle leggi dinamiche, e quindi, supponendo trascurabili le mutue influenze, con che ciascuna si comporta come un punto materiale libero, alle (3) e (4). D'altra parte le leggi stesse devono riportare, almeno con grande approssimazione, ai fatti osservati in condizioni ordinarie, i quali sono: velocità c, andamento rettilineo anche entro il campo gravitazionale terrestre e solare.

7. - Apprezzamenti numerici sul campo gravitazionale nel sistema solare e sul presumibile incurvamento dei raggi luminosi.

Possiamo agevolmente rendercene conto, assegnando anche la formula che in seconda (e più che bastevole) approssimazione può essere sostituita alla prima delle (4) come misura dell'incurvamento locale.

Cominciamo perciò dal considerare l'ordine di grandezza di U che vogliamo identificare col potenziale newtoniano di campi appartenenti al sistema solare. A titolo di apprezzamento, possiamo riferirci a corpi sferici, omogenei, ovvero stratificati per sfere concentriche. Se R è il raggio, M la massa ed f la costante di attrazione, fM/R rappresenta il valore del potenziale proprio alla superficie, valore che è evidentemente il più grande di quelli presi da U nei punti non interni alla sfera potenziante, dacchè essa agisce su ognuno di questi punti come se tutta la massa fosse raccolta nel centro. In quanto poi ai varî corpi del sistema solare, il più grande valore numerico di fM/R si ha notoriamente pel Sole. Si tratta in ogni caso di una quantità [che ha le dimensioni di un potenziale unitario e quindi del quadrato di una velocità, come tra altro apparisce dalla (3)] molto piccola rispetto a c^2.

Calcoliamo infatti il rapporto fM/c^2R, pel Sole, tenendo conto di $c = 30 \cdot 10^4$ km/sec, e di questi altri due dati: *a*) il raggio apparente del Sole (per un osservatore terrestre alla distanza media) vale in cifra tonda (errore relativo inferiore al millesimo) 16′; *b*) la velocità (media) della Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole vale, pure in cifra tonda (con errore inferiore al centesimo), 30 km al secondo.

Designando con Δ la distanza media Sole-Terra, sarà R/Δ la misura in radianti dell'angolo di 16′, sicchè

$$\frac{R}{\Delta} = 16 \cdot \frac{2\pi}{360 \cdot 60} = \frac{4\pi}{27 \cdot 10^2},$$

ossia

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{27 \cdot 10^2}{4\pi} = 214 .$$

Si ha così, in base al dato *a*) ,

$$\frac{1}{c^2}\frac{fM}{R} = \frac{\Delta}{R} \cdot \frac{1}{c^2}\frac{fM}{\Delta} = 214 \cdot \frac{1}{c^2}\frac{fM}{\Delta} .$$

Ricordiamo d'altra parte che, per il moto in un circolo di raggio Δ dovuto all'attrazione della massa M situata nel centro, si ha [per es. dalla prima delle (4)]

$$v^2 = \frac{fM}{\Delta}.$$

Applicando questa relazione al moto orbitale terrestre e tenendo conto del dato *b*), possiamo scrivere

$$\frac{1}{c^2}\frac{fM}{\Delta} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 10^{-8},$$

onde risulta

$$\frac{1}{c^2}\frac{fM}{R} = 214\cdot 10^{-8} = 2{,}14\cdot 10^{-6}. \tag{6}$$

Dacchè, come già si osservò, nell'espressione del potenziale U dovuto ai corpi del sistema solare, il termine che rispecchia l'attrazione del Sole assume un valore massimo di gran lunga preponderante sugli analoghi massimi degli altri termini, si può ritenere che, *in tutto lo spazio interplanetario, l'ordine di grandezza di U/c^2 è conforme alla* (6), *cioè inferiore a pochi milionesimi.*

Entro questa approssimazione la (3) ci fa precisamente ritrovare la prima legge dell'ottica geometrica (velocità di propagazione $= c$). Basta infatti attribuire alla costante E del secondo membro il valore $\frac{1}{2}c^2$ per avere come espressione rigorosa di v:

$$v^2 = c^2 - 2U = c^2\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right),$$

donde appunto, trascurando $2U/c^2$ (che ammonta al massimo a pochi milionesimi) di fronte all'unità,

$$v = c, \qquad \textit{c. d. d.}$$

L'altra legge, considerata finora come fondamento dell'ottica geometrica, è che (anche entro campi di forza quali quelli esistenti negli spazî interplanetari) i raggi hanno andamento rettilineo. Secondo l'ammesso postulato, le traiettorie sono invece definite dalle (4), in cui va sostituito a v^2 il valore (3), ossia, coll'approssimazione testè specificata, il valore costante c^2. Ciò consente senz'altro di riconoscere che, se l'andamento non è rigorosamente rettilineo come assume la fisica classica, se ne scosta però in misura quasi insignificante. Infatti, dalla prima delle (4), in cui si scriva c^2 per v^2, si ha

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{c^2}\frac{dU}{dN}.$$

La derivata dU/dN rappresenta la forza del campo nella direzione N, e perciò non può superare l'intensità di tale forza. Riprendendo il caso tipico del Sole, che fissa l'ordine di grandezza, si ha la massima intensità alla sua stessa superficie, talchè

$$\left|\frac{dU}{dN}\right| \leqslant \frac{fM}{R^2},$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{\varrho} \leqslant \frac{1}{c^2}\frac{fM}{R}\cdot\frac{1}{R}.$$

Il primo fattore del secondo membro è un puro numero, e precisamente, in base alla (6), la piccola frazione $2{,}14\cdot 10^{-6}$. Ne viene che $1/\varrho$ (cioè l'incurvamento dei raggi per effetto del campo gravitazionale) non supera tale piccola frazione di $1/R$; in altri termini, il raggio di curvatura, se non è proprio ∞, come per le rette, è almeno dell'ordine di un milione di volte il raggio del Sole.

8. - Effetto angolare massimo (deflessione) per raggi che rasentano la corona solare - Applicazione ad un osservatore terrestre.

La forma rigorosa dei raggi va naturalmente desunta dalle (3), (4), con $E = \frac{1}{2}c^2$. Si tratta, come abbiamo più volte rilevato, delle equazioni del moto di un punto materiale in un campo conservativo di potenziale U. Se questo proviene da un'unica massa gravitante — pensiamo specificamente al Sole — il problema è proprio quello del moto di un punto attratto da un centro fisso, la cui integrazione risale a NEWTON. Le traiettorie sono classicamente coniche col fuoco nel centro di forza, la cui specie dipende dal segno della costante E. Per $E > 0$, e tale è il caso nostro, in cui va attribuito ad E il valore $\frac{1}{2}c^2$, si tratta manifestamente di iperboli. La circostanza qualitativa già rilevata che i raggi rimangono pochissimo incurvati, anche se passano vicinissimi al Sole, ci avverte che dovrà in ogni caso trattarsi di iperboli a asintoti OA', OT' quasi per diritto (fig. 2).

Consideriamo in modo preciso un raggio iperbolico il quale lambisca la sfera solare in V. Sia O il centro dell'iperbole, S quello del Sole e quindi il fuoco della stessa iperbole. Sarà V il suo vertice e, ove si designi con a il semiasse trasverso, con e l'eccentricità, avremo per definizione

$$\overline{OV} = a\,, \qquad \overline{OS} = ae\,, \qquad \overline{SV} = R = a(e-1)\,.$$

Si sa d'altra parte dalla geometria analitica che, se si rappresenta con δ l'angolo (esterno) compreso fra i due asintoti,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}.$$

Nel caso che ci occupa, δ deve essere piccolissimo; quindi e grandissimo, in base alla formula ora scritta. Potremo tranquillamente ritenere

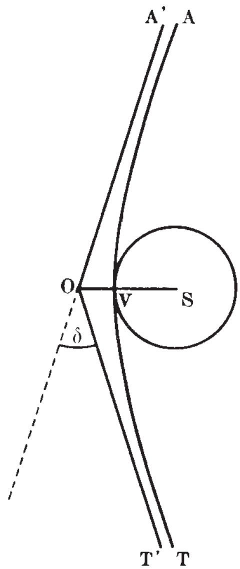

Fig. 2.

la tangente confondibile coll'arco, e $1/e$ trascurabile di fronte all'unità. Con ciò al posto di

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\delta = \frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e},$$

si può scrivere

$$\delta = \frac{2}{e} = \frac{2}{e}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{e}} = \frac{2}{e-1}.$$

Badando alla relazione $R = a(e-1)$, risulta in definitiva come misura di δ in funzione delle due lunghezze R ed a,

$$\delta = \frac{2a}{R} . \tag{7}$$

Il semiasse trasverso a, nel moto iperbolico dovuto all'attrazione newtoniana di una massa M, è classicamente legato alla costante E delle forze vive dalla relazione

$$E = \frac{fM}{2a} .$$

Ricavandone a e ponendo per E il suo valore $\frac{1}{2}c^2$, la (7) diviene

$$\delta = 2 \cdot \frac{1}{c^2} \frac{fM}{R} , \tag{7'}$$

e quindi, badando alla (6),

$$\delta = 4{,}28 \cdot 10^{-6} .$$

Il secondo membro è un puro numero che esprime l'angolo δ in radianti. Per averlo in $''$, dovremo moltiplicare per

$$\frac{360 \times 60 \times 60}{2\pi} = 57^\circ\, 17'\, 45'' = 206265'' ,$$

con che risulta

$$\delta = 0'',88 . \tag{8}$$

Si riconosce immediatamente che quest'angolo δ porge appunto la misura della *deflessione*, ossia della massima deviazione angolare di cui è suscettibile un raggio stellare per effetto gravitazionale del Sole. Supponiamo infatti di considerare un raggio di luce che parte da un astro A e arriva ad un osservatore terrestre T, seguendo un arco di iperbole che rasenta la corona solare in V, come nella fig. 2. La direzione dell'iperbole in T, secondo cui l'osservatore riceve il raggio di luce, si confonde con quello dell'asintoto OT'; la direzione secondo cui la luce è partita dall'astro è quella della tangente in A, che si confonde a sua volta coll'altro asintoto $A'O$. *c. d. d.*

Naturalmente $A'O$ si può identificare colla direzione secondo cui T percepisce la stella in condizioni normali, cioè quando, allontanandosi il Sole dalla direzione Terra-Astro e divenendo insensibile la perturbazione gravitazionale corrispondente, il raggio visuale torna ad essere rettilineo (ossia si scosta dall'andamento rettilineo in modo addirittura inapprezzabile).

Non sarà male osservare che, se il raggio visuale di una stella, anzichè rasentare la sfera solare, passa a una distanza $R_1 > R$ dal centro del Sole, la deflessione diminuisce, precisamente in ragione inversa della detta distanza perielia R_1.

Basta osservare che l'espressione (7) di δ seguita naturalmente a sussistere, per una qualsiasi stella visibile dalla Terra, purchè soltanto vi si sostituisca al posto di R la distanza perielia R_1. Avremo in conformità

$$\delta = \frac{2a}{R} = \frac{2a}{R} \cdot \frac{R}{R_1} .$$

Il fattore $2a/R_0$ è stato calcolato or ora, sicchè risulta in definitiva

$$\delta = 0{,}88 \frac{R}{R_1} .$$

Dacchè R corrisponde a $16'$, basta evidentemente che la distanza angolare dal centro del Sole sia di pochissimi gradi, perchè δ non superi qualche centesimo di secondo e riesca quindi del tutto inavvertibile, come se il raggio rimanesse rigorosamente rettilineo.

9. - Ritorno al caso generale di un campo di forza qualsiasi - Equazione variazionale dei raggi luminosi, che compendia le vedute ordinarie associate al principio di proporzionalità.

Abbiamo già rilevato alla fine del n. 6 che, in un generico campo di forza di potenziale U, la propagazione dei raggi luminosi è retta dalle (3), (4), ossia dalle stesse equazioni che convengono al moto di un punto materiale; soltanto (n.° 7) conviene specificare la costante delle forze vive E attribuendole il valore $\frac{1}{2}c^2$. Con ciò si ha

$$v = \sqrt{c^2 + 2U} ,$$

e l'equazione variazionale (5) che definisce comprensivamente il fascio di traiettorie coincidente coi raggi luminosi, si scrive

$$\delta \int \sqrt{c^2 + 2U}\, ds = 0 ,$$

o, ciò che è lo stesso, dividendo ambo i membri per c,

$$\delta \int \sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}}\, ds = 0 . \tag{9}$$

III

LA RELATIVITÀ GENERALE E LE SUE CONSEGUENZE CONCRETE CIRCA L'ANDAMENTO DEI RAGGI LUMINOSI IN UN CAMPO DI FORZA

10. - Tempo e spazio nella fisica classica - Demolizione relativistica delle premesse tradizionali.

Due sono i cardini della abituale rappresentazione geometrica e cinematica dei fenomeni naturali:

1) Lo spazio in cui tali fenomeni si localizzano è rigorosamente euclideo, possiede cioè le ben note caratteristiche che gli attribuisce l'intuizione diretta, disciplinata e codificata dalla geometria elementare.

2) Il tempo si può concepire e (almeno in astratto) misurare indipendentemente da ogni riferimento spaziale; esiste cioè un assoluto al quale si possono immaginare riportati gli orologi di tutti gli osservatori. È questo il tempo contemplato nella legge di inerzia, nella costanza della velocità c della luce rapporto all'etere, ecc.

Orbene, la così detta relatività ristretta (o della prima maniera) ha cominciato col contestare questa seconda veduta, rilevando, in base alle stesse modalità fisiche di misura del tempo, che due osservatori in moto (uniforme) l'uno rispetto all'altro, possono arrivare con identico procedimento (scambio di segnali) ad apprezzarlo in modo diverso. Donde l'opportunità di modificare tutta l'impostazione concettuale, rinunciando al tempo assoluto, e sostituendovi un postulato che mette, per così dire, sullo stesso piede due osservatori che sono in moto (uniforme) l'uno rispetto all'altro. Il postulato consiste nell'ammettere l'eguaglianza, per entrambi, della velocità di propagazione di uno stesso raggio di luce, mentre secondo la cinematica classica, queste due velocità dovrebbero differire per quella spettante al moto relativo dei due osservatori. Con ciò si stabilisce un legame fra le misure di tempo e quelle di spazio, e si vengono ad alterare in conformità fino i primi elementi di cinematica. Tenendo conto delle conseguenti modificazioni, rimangono spiegati nel modo più soddisfacente il risultato negativo dell'esperienza di Michelson, nonchè il parziale trascinamento delle onde luminose in un mezzo in moto, sperimentalmente constatato da Fresnel, risultando d'altro lato che per gli ordinari fenomeni della meccanica dei corpi ponderabili (velocità piccole di fronte a c), le correzioni sono addirittura trascurabili.

Pur rivoluzionando (sotto l'aspetto speculativo) cinematica e meccanica e con esse tutta la fisica, la relatività della prima maniera rispettava ancora, quanto alla localizzazione dei fenomeni nello spazio, i postulati della geometria elementare. In verità, discussioni appassionate intorno alla natura metrica dello spazio ambiente si erano svolte, come è ben noto, nel secolo scorso, a proposito della geometria non euclidea (o geometria degli spazi a curvatura costante). Tuttavia, in base ai controlli offerti dall'astronomia e dalla meccanica, esse avevano portato alla conclusione che, se pure lo spazio fisico è a curvatura costante non nulla, il divario da uno spazio euclideo (curvatura rigorosamente nulla) dovrebbe essere così piccolo da sfuggire alle più affinate osservazioni. Pareva così superata l'eventualità di dover ricorrere a un più complicato schema geometrico, rafforzandosi l'ipotesi — vorrei dire il sentimento — che il nostro spazio sia rigorosamente euclideo.

Ma anche quest'ultimo credo scientifico dovette essere sacrificato per inquadrare in una concezione unitaria spazio, tempo e gravitazione. A tanto perviene la relatività generale di EINSTEIN. Riassumerne, anche nel modo più sommario, il contenuto specifico non è possibile senza una preparazione adeguata. Rimandando il lettore, desideroso di acquistare un'idea di questa radicale trasformazione della filosofia naturale, a qualcuna delle esposizioni di insieme finora pubblicate (5), mi limiterò qui a riferire quanto è strettamente necessario per afferrare la genesi della formula in cui si compendiano le conseguenze ottiche di prima approssimazione.

11. - Modificazione dello spazio - Influenza sull'andamento dei raggi luminosi - Formula finale.

Alla incondizionata validità della geometria euclidea si sostituisce, secondo EINSTEIN, l'ipotesi, già affacciata in astratto da RIEMANN e da CLIFFORD, che anche la natura metrica dello spazio (che si estrinseca nelle relazioni fra i varî elementi di una generica figura) possa dipendere dai fenomeni che vi si svolgono: in particolare dalla presenza e dal moto della materia.

L'ipotesi stessa si complica colla già postulata fusione delle misure di spazio e di tempo e si concreta in un sistema di equazioni differenziali

(5) Cfr. in particolare: A. EINSTEIN, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Braunschweig, Vieweg (3ª ediz.), 1920 [di cui l'ing. CALISSE stà preparando una traduzione italiana]; A. S. EDDINGTON, *Space, Time, Gravitation*, « Cambridge University Press », 1920. A chi voglia approfondire, rendendosi anche conto dello svolgimento matematico, sono specialmente raccomandabili le lezioni di H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, Berlin, Springer (3ª ediz.), 1920.

che presiedono a queste deformazioni spaziali e temporali. Ben si intende che si tratta di deformazioni tenuissime, le quali nemmeno si avvertono nell'ambito dei fenomeni, in certo senso grossolani, che già sono soddisfacentemente rappresentati colle teorie ordinarie; ma in alcuni pochi casi ne discendono conseguenze sperimentalmente apprezzabili. Tra queste, celeberrima, la spiegazione dello spostamento secolare del perielio di Mercurio, di fronte a cui erano rimasti sterili tutti gli sforzi della meccanica celeste, che pur basta a rendere conto di particolarità anche più minute dei movimenti planetari. Inoltre — ci siamo — l'incurvamento dei raggi luminosi in un campo di forza.

Circa l'incurvamento, già sappiamo dal precedente § II, che il fatto qualitativo non è una prerogativa della teoria di EINSTEIN. Anche conservando in tutto lo schema classico, vi si è condotti colla sola ipotesi addizionale che energia e materia siano manifestazioni, diverse soltanto per gradi, di una stessa entità fisica. Lo svolgimento matematico di tali premesse porta, come abbiamo visto, alla formula variazionale (9) per definire in generale l'andamento dei raggi, nonchè in particolare [formula (8)] al valore numerico 0",88 per la deflessione che dovrebbe essere causata dal Sole sopra raggi stellari che ne lambiscano la corona.

Che cosa dà, a calcoli eseguiti, la teoria di EINSTEIN, quando la si applica a prevedere l'effetto di masse materiali sulla propagazione della luce?

Essa implica in primo luogo — ciò è uno dei suoi cardini, come abbiamo rilevato — cambiamento di natura metrica dello spazio ambiente, il quale non resta più euclideo, ma si incurva, come (scendendo da tre a due dimensioni per avere un'analogia tangibile) accade di una superficie piana, membrana o piastra elastica assicurata al contorno, quando venga per esempio premuta nelle parti centrali.

D'altra parte la teoria stessa (limitandoci per semplicità alla prima approssimazione) porta a riconoscere che basta sovrapporre la deformazione dello spazio al diretto incurvamento dei raggi, già calcolato per via energetica e rappresentato dalla (9).

In definitiva, *le cose vanno come se lo spazio ambiente* (che in realtà, o se vogliamo essere agnostici, secondo la concezione einsteiniana, si è incurvato) *rimanesse rigorosamente euclideo e i raggi vi fossero definiti dal principio variazionale* (6)

$$\delta \int \sqrt{1 + \frac{4U}{c^2}}\, ds = 0, \tag{10}$$

(6) Per la dimostrazione veggansi le note: *Statica einsteiniana*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. XVI (1° semestre 1917), pag. 459-470, e *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. I: Generalità e prima approssimazione*, « ibidem » (2° semestre 1917), pp. 307-317 [in questo vol.: pp. 59-73 e 89-99].

rappresentando U il potenziale newtoniano delle masse che si prendono in considerazione.

Il confronto colla (9) mostra che c'è una sola differenza: il fattore 4, anzichè 2, premesso ad U. Si può quindi inferirne che *anche secondo la teoria della relatività generale* (limitata alla prima approssimazione, cioè ritenendo trascurabili i termini di 2° ordine in U/c^2), *i raggi luminosi entro un campo di forza potenziale U si identificano con un fascio di traiettorie dinamiche, spettanti però al potenziale doppio $2U$; la costante delle forze vive caratteristica del fascio è $\frac{1}{2}c^2$* (questo, come nella teoria ordinaria cui si associ il postulato di proporzionalità).

La sostituzione di $2U$ ad U, nella equazione comprensiva che definisce i raggi, porta naturalmente la stessa sostituzione nelle equazioni che se ne ricavano. Riferendosi in particolare al caso della attrazione solare, discusso al § II, per cui $U = fM/r$ (r distanza dal centro del Sole) basterà materialmente raddoppiare il coefficiente fM, nelle varie formule.

Risulta così, dalle (7′) ed (8), che *la deflessione* (dei raggi che provengono da una stella e rasentano la corona solare) *prevista dalla teoria di Einstein è doppia di quella calcolata coi soliti criteri in base alla semplice proporzionalità fra energia e massa materiale, e ammonta a*

$$1'',76 .$$

Siamo in un ordine di grandezza perfettamente accessibile ad accurate osservazioni astronomiche.

Si noti che, per Giove, l'analogo effetto, pur in condizioni di massimo, raggiunge appena 0″,017, rimanendo quindi inapprezzabile.

12. - Conferma sperimentale.

Gli eventuali spostamenti angolari dovuti al Sole divengono effettivamente osservabili durante una sua eclisse totale. Concettualmente, basta scegliere una qualche stella fissa il cui raggio visuale passi rasente al Sole nel momento dell'eclisse, e paragonare la posizione osservata in tale occasione con quella che si desume dai cataloghi. In pratica, data la limitata precisione dei cataloghi che può lasciare incertezze dell'ordine di 1″, si ricorre al confronto di lastre fotografiche (di zone del cielo prossime alla corona solare), ottenute durante l'eclisse, e in condizioni normali.

Un primo tentativo in questo senso fu promosso dall'Osservatorio di Lick nel 1918; ma la precisione delle osservazioni riuscì insufficiente allo scopo.

Per l'eclisse totale del 29 maggio 1919, due spedizioni simultanee furono organizzate dalla Società Reale di Londra: l'una operò a Sobral nel Brasile settentrionale, l'altra all'isola di Principe nel Golfo di Guinea, località entrambe comprese nella zona di totalità dell'eclisse. I risultati delle osservazioni raccolte in queste due spedizioni si possono riassumere come segue (7): La media degli spostamenti osservati a Sobral dà per la deflessione 1″,98 (con errore probabile di $\pm$ 0″,12); l'analoga media delle osservazioni di Principe dà 1″,61 (con errore probabile di $\pm$ 0.30). Fra i due valori sperimentali sta la deflessione 1″,76 prevista dalla relatività generale di EINSTEIN. Questa ne ha così ricevuto nuova e clamorosa conferma, rimanendo nettamente esclusa sia la deviazione nulla dell'ottica geometrica, sia la mezza deviazione (0″,88), cui si sarebbe condotti (§ II) dalla teoria ordinaria, associandole il semplice postulato di proporzionalità fra massa e energia.

---

(7) DYSON, EDDINGTON and DAVIDSON, *A determination of the deflection of light by the Sun's gravitatonal field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919*, « Transactions of the Royal Society of London, S. A. », Vol. 220, 1920, pagine 291-333.

SULLA NOZIONE DI INTERVALLO FRA DUE AVVENIMENTI: PRIMO APPROCCIO ALLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ

Nota di T. LEVI-CIVITA

Sunto. - *Si premette una sommaria analisi dei criteri, che consentono di fissare un'unica variabile* t, *atta a rappresentare il tempo per quanti si vogliono osservatori, in quiete l'uno rispetto all'altro. Si contempla quindi il caso di un osservatore mobile, e si localizza il divario fra l'impostazione della fisica classica, che assume uno stesso comportamento del tempo anche per l'osservatore mobile, postulando così un tempo assoluto, e altre impostazioni a priori possibili. Fra quest'ultime spicca naturalmente la relativistica, che si può caratterizzare anche senza passare, come si fa di solito, attraverso un'analisi approfondita dei moti traslatori uniformi. All'uopo basta introdurre una conveniente nozione quantitativa di intervallo fra due avvenimenti, e postulare l'indipendenza dall'osservatore dell'intervallo, anzichè del tempo.*

In una conversazione, che ebbi coll'EINSTEIN alcuni anni or sono, gli chiesi se (considerando, per fissar le idee, il caso più semplice della relatività ristretta) si possa assegnare una qualche interpretazione concreta (non semplicemente geometrico-convenzionale) all'intervallo cronotopico elementare ds^2. Ciò parrebbe tanto più desiderabile in quanto c'è già un particolare valore del ds^2, lo zero, che ha un interesse fondamentale, essendo caratteristico delle propagazioni luminose. Egli mi rispose di non conoscere alcun significato fisico del ds^2 generico, ossia in sostanza della misura dell'intervallo fra due avvenimenti infinitamente vicini (escluso il caso suaccennato di intervallo nullo).

Dopo di allora ripensai talvolta, pur con poca fiducia, al modo di sanare questa lacuna concettuale, trovandone pressochè annualmente incentivo scolastico, nelle prime lezioni di cinematica, quando, a proposito del moto relativo, soglio contrapporre (per pochi minuti) la concezione relativistica a quella classica. Sarei ora pervenuto, riprendendo e completando tali riflessioni didattiche, a caratterizzare in modo diretto il contenuto empirico-assiomatico della nozione di intervallo, introdotta quasi sempre a posteriori [1], per analogia formale, ovvero attraverso la trasformazione di LORENTZ. Di tutto ciò rendo conto nel presente articolo, con considerazioni assolutamente elementari, cercando di giustificare la plausibilità delle singole ammissioni.

Nozione ordinaria di tempo per un ben determinato osservatore.

1. — Nulla c'è da mutare o da aggiungere alla genesi tradizionale del tempo per un osservatore determinato O. Si prende al solito in considerazione la successione di stati fisio- o psico-logici, e attraverso fenomeni ritmici (battito del polso, avvicendarsi di giorni e stagioni, dispositivi tipo clessidre, vibrazioni spontanee o opportunamente disciplinate, ecc.), si passa ad una raffinata misura del tempo, quale si può leggere sopra un buon orologio, in corrispondenza ai valori di un parametro reale t.

Osservatori in quiete l'uno rispetto all'altro (immersi tutti nell'ordinario spazio euclideo S).

2. — Coi criteri anzidetti ciascun osservatore O, O' ... si fabbrica il proprio tempo, donde altrettante variabili, a priori indipendenti, t, t', ...

Si ammetterà (premessa indispensabile di qualsiasi teoria scientifica) che la grande maggioranza degli osservatori si comporti (in media) nello stesso modo, si tratti cioè di osservatori normali; e più precisamente che gli strumenti, mediante i quali due generici osservatori normali O, O' affinano le proprie misure di tempo, possano funzionare nello stesso modo in O ed in O'. Nell'ammettere questo, ci si appoggia essenzialmente sulla omogeneità dello spazio ambiente S. Si possono in conseguenza concepire fenomeni, per esempio vibratori, identici nei due posti.

Si diranno uguali due intervalli di tempo, Δt, percepito da O e $\Delta t'$, percepito da O', quando corrispondono a durate di due fenomeni perfettamente analoghi, nei quali cioè, a prescindere dal posto, le circostanze siano (almeno idealmente) identiche. Scelto un parti-

[1] Un posto a parte spetta alla originale trattazione del BIRKHOFF nel suo libro *Relativity and modern Physics* (Cambridge Mass., Harvard University Press, 1923), dove i postulati fondamentali della relatività vengono introdotti, dopo accurata analisi dei fenomeni ottico-cinematici, per un sistema di quanti si vogliono punti, mobili l'uno rispetto all'altro con velocità costante.

colare fenomeno per caratterizzare l'unità di misura adottata da $O(\Delta t = 1)$, l'analogo fenomeno fornirà l'unità di misura per $O'(\Delta t' = 1)$, ecc. Rimane così acquisita la possibilità di fissare, in due punti generici O ed O' di S, le scale temporali t e t' in modo che sia costantemente $\Delta t' = \Delta t$, ossia che t' e t diferiscano per una costante T (dipendente dalla coppia O, O').

Unificazione dei tempi adottati da varî osservatori. Tempo pantopico.

3. — Per unificare i tempi, cioè per arrivare ad una variabile unica t, *tempo pantopico,* comune a tutti gli osservatori in quiete entro S, c'è ancora da riconoscere come si possa rendere $T = 0$. Dal punto di vista logico basta introdurre tale possibilità per postulato. Ma dal punto di vista fisico e concettuale, occorre darne una giustificazione intuitiva in base a qualche fatto di esperienza (interna od esterna) .

Fenomeni luminosi. Propagazione rettilinea della luce con velocità costante c.

4. — Considerando due osservatori O e O' abbastanza vicini perchè possano comunicare (verbalmente) fra loro, si può ritenere che essi si diano la voce in modo da accordare le origini dei loro tempi, o, se si vuole, le indicazioni dei loro orologi, in modo appunto da determinare la differenza (costante) T, e renderla poi eguale a zero con un semplice spostamento dell'origine dei tempi di uno dei due osservatori (o di entrambi, in ovvia correlazione). Lo stesso vale se gli osservatori sono lontani, ma possono scambiarsi segnali che non impieghino tempo apprezzabile per passare dall'uno all'altro. Nei casi comuni tale è il comportamento dei segnali luminosi, la cui propagazione, fino a due secoli e mezzo or sono, si riteneva istantanea. Ma, anche senza questa astrazione, si raggiunge egualmente l'intento, assumendo come fatto sperimentale che la luce si propaga negli spazi interplanetari, e anche nell'aria, alla superficie della terra, in linea retta, con la velocità costante c (circa 300000 Km/sec). Per conseguenza ammetteremo che due osservatori O e O', distanti l nel considerato spazio euclideo S, possano scambiarsi segnali i quali impiegano, nell'uno e nell'altro senso, un tempo l/c ad arrivare a destinazione. In base a questa nuova ipotesi, la relazione fra t' e t si stabilisce ovviamente, immaginando per esempio che O' riceva, quando il suo orologio segna t'_0, un segnale partito da O all'istante t_0. Se

ogni t' differisce da t per l'incognita costante $T(O, O')$, dovrà sussistere l'eguaglianza

$$t_0' - T = t_0 + \frac{l}{c},$$

la quale determina T mediante i dati sperimentali t_0, t'_0, nonchè l e c.

L'insieme delle precedenti ammissioni richiede che, regolati una volta nel modo indicato i tempi di due generici osservatori O' ed O'' mediante scambio di segnali con O, i due tempi t' e t'' risultino automaticamente coincidenti: $T(O', O'') = 0$. E si ha così un mezzo per controllare sperimentalmente l'attendibilità complessiva delle varie premesse (spazio *omogeneo* S, osservatori in quiete, tempi individuali, eguali durate, geometria euclidea, propagazione della luce in linea retta con la velocità costante c).

Il tempo assoluto della cinematica classica. Principio di composizione delle velocità.

5. — Sia ancora O un generico osservatore, immobile, del nostro spazio S, coincidente per es. coll'origine di un triedro cartesiano di riferimento $Oxyz$. Sia poi O' un secondo osservatore *mobile* rispetto al primo, o, più precisamente, rispetto al triedro $Oxyz$. Consideriamo un secondo sistema di riferimento $O'x'y'z'$, coll'origine in O', fissando l'attenzione sul caso elementare (concettualmente tipico) in cui gli assi $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ rimangono ordinatamente paralleli agli assi fissi Ox, Oy, Oz.

Dette a, b, c, per ipotesi variabili con t, le coordinate del punto O' rispetto agli assi fissi, avremo, fra le due terne di coordinate x,y,z ed x', y',z' di un punto generico P (comunque variabile), le formule di trasformazione

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c. \tag{1}$$

Ai nn. 2 e 3, prendendo in considerazione osservatori *fissi*, uno rispetto all'altro, siamo pervenuti, con ammissioni di particolare evidenza intuitiva, alla definizione di un tempo unico t: essenziale era all'uopo la presunzione di identità di circostanze rispetto ai vari osservatori. Tale identità viene a mancare quando un osservatore si muove rispetto ad un altro.

Nella cinematica classica *si ammette* che a questo riguardo, cioè nell'apprezzamento del tempo, il moto sia inessenziale, e quindi che *un'unica variabile* t *funga da tempo tanto per* O *quanto per* O'. In altri termini si postula un *tempo assoluto*, cioè indipendente dal moto dell'osservatore. Si ottiene allora, in tutte le trattazioni scolastiche, il principio di composizione delle velocità per semplice derivazione delle (1) rapporto a t. Infatti, se P varia, potremo considerare i suoi cambiamenti di posizione, tanto rispetto all'osservatore O, ossia al triedro $Oxyz$ (moto assoluto), quanto rispetto agli assi $O'x'y'z'$ (moto relativo). Fra le coordinate x,y,z di P riferite al primo triedro e le coordinate x',y',z' dello stesso punto riferite al secondo triedro passano le relazioni (1). In virtù del postulato, una stessa variabile t funge da tempo nei due moti; e dalle (1) si ha, derivando,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{da}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} + \frac{db}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} + \frac{dc}{dt}. \tag{2}$$

Attesa la definizione di velocità, il vettore $\boldsymbol{v}_a$, di componenti $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ rappresenta la velocità di P quale apparisce all'osservatore O, *velocità assoluta*; il vettore $\boldsymbol{v}_r$, di componenti $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$, rappresenta la sua *velocità relativa*, cioè apprezzata da O'; infine il vettore di componenti $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$ non è altro che la velocità $\boldsymbol{v}$ di O' rispetto ad O (velocità di trascinamento). Perciò le (2) si compendiano nella formula vettoriale

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}, \tag{2'}$$

che esprime il così detto principio dei moti relativi, ben radicato nella concezione tradizionale dei fenomeni di moto.

Applicazione alla velocità della luce. Esperienza di Michelson.

6. — Nella ipotesi (n. 4), pur di universale consenso, che la propagazione luminosa possa schematizzarsi, rispetto ad un generico osservatore O, immobile entro S, come un particolare movimento rettilineo con velocità (vettoriale) costante $\boldsymbol{c}$, sarà anche ad esso applicabile la (2′), fungendo $\boldsymbol{c}$ da $\boldsymbol{v}_a$. La velocità relativa $\boldsymbol{v}_r$ rappresenta allora la velocità $\boldsymbol{c}'$ della luce rispetto all'osservatore mobile O', e $\boldsymbol{c}'$ risulta in generale diversa da $\boldsymbol{c}$, valendo la relazione

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}' + \boldsymbol{v}. \tag{3}$$

Nel caso semplice in cui O' si muove nella stessa direzione della propagazione, e nello stesso verso, oppure nell'opposto, seguono, specificamente, fra i valori assoluti delle velocità, le relazioni

$$c = c' \pm v, \tag{3'}$$

valendo il segno + quando il moto di O' avviene nel verso della luce, il segno — nel caso opposto.

Se si assume come spazio S l'etere, ossia lo spazio assoluto della meccanica classica (detto delle stelle fisse, perchè, pur tenendo conto dei moti propri, è desumibile dalle osservazioni delle dette stelle), sarà appunto c la velocità assoluta da attribuirsi alla luce, mentre, per un osservatore terrestre O', la velocità c' sarà definita dalla (3). Tenendo presente che, nel moto orbitale della Terra, la velocità v è di circa 30 Km/sec, il rapporto v/c è dell'ordine di 10^{-4}. Perciò la (3) lascia prevedere una differenza di quest'ordine nelle velocità di propagazione della luce al variare della direzione. In particolare varrà la (3'), quando si fissi, alla superficie della Terra, in un dato posto O' e in un dato istante, la direzione secondo cui avviene in quell'istante il moto orbitale terrestre, e si tratti di raggi luminosi che si propagano proprio in questa direzione, nell'uno o nell'altro verso. Una tale differenza di velocità dovrebbe dar luogo, in una celebre esperienza, ideata ed eseguita per la prima volta da MICHELSON nel 1881, ad uno spostamento di frange di diffrazione perfettamente osservabile (pur tenendo conto della circostanza che vi influiscono solo termini di secondo ordine rispetto al rapporto v/c). Invece, sia l'esperienza originale del MICHELSON, sia le successive, eseguite con ogni cura da lui e da altri fisici, hanno sempre dato esito negativo: cioè mancanza del previsto spostamento di frange, *quasi totale,* certo in misura di gran lunga inferiore (appena pochi centesimi) di quanto si presumeva; donde la legittima illazione che in natura le cose devono andare in modo che risulti c eguale a c', rigorosamente, o, comunque, con approssimazione assai maggiore di quella che farebbe prevedere la (3), cioè la solita regola di composizione delle velocità.

Necessaria modificazione di qualcuna delle premesse, che complessivamente implicherebbero esito positivo dell'esperienza di Michelson. Cenno storico.

7. — Durante parecchi lustri molto si arrovellarono i fisici per render conto dell'esito negativo testè riferito. Una almeno delle premesse, su cui si fondava la previsione, doveva essere rigettata onde ristabilire il buon accordo coi fatti osservati. Ma quale delle premesse, tutte così ovvie e spontanee, richiamate nei nn. precedenti? Non sembrando attaccabili le nozioni geometriche, nè, per sè stesse, quelle cinematiche, si dubitò in primo luogo che fosse troppo semplicistico il trattare la propagazione della luce come un ordinario movimento di velocità costante c; e, in particolare, che nei corpi in movimento intervenga qualche modificazione delle leggi ottiche, per cui non sia più il caso di applicare la regola di composizione delle velocità (STOKES, RITZ). Queste ipotesi portano però a notevoli complica-

zioni, e anzi peggiorano, per altri fenomeni, l'accordo coi risultati sperimentali, che si voleva invece assicurare più generalmente, sacrificando, se indispensabile, la semplicità del modello.

Una spiegazione fu trovata, come è ben noto, da LORENTZ, in base alla teoria elettromagnetica della luce. Ma non tutti se ne appagarono. Le formule denunciavano certi effetti (contrazione di tempo e di lunghezze), che, per quanto inapprezzabili nell'esperienza macroscopica quotidiana, apparivano in netto contrasto colle abituali concezioni cinematiche. L'accogliere *insieme* queste e quelli costituiva un compromesso poco soddisfacente: il famoso « coup de pouce » del POINCARÉ, accettabile soltanto perchè riesce conforme all'esperienza, così nei limiti di approssimazione raggiungibili in meccanica, come nei più delicati fenomeni elettro-magnetico-ottici.

Una interpretazione dell'ibrido connubio, senz'altro luminosa sotto l'aspetto speculativo, spontanea per il pensiero galileiano che la informa, e grandiosa nelle sue conseguenze concrete, è quella fornita nel 1905 dall'EINSTEIN, col suo principio di relatività. Egli ebbe il coraggio di romperla coi ripieghi, lasciandosi guidare dal convincimento che il principio ordinario di relatività, a norma del quale le leggi dei fenomeni meccanici sono le stesse rispetto a quanti si vogliono riferimenti, animati l'uno rispetto all'altro da traslazione uniforme, doveva, in qualche maniera, potersi estendere a *tutti* i fenomeni, in particolare al più elementare dei fenomeni ottici: la propagazione rettilinea della luce.

Nello schema classico non è così, a norma del principio del moto relativo: formule (3) o, in particolare, (3'). EINSTEIN si propose di *modificare lo schema classico* in modo da poter estendere la relatività galileiana anche ai fenomeni luminosi: si intende che la modificazione doveva essere abbastanza insignificante, nell'ambito delle velocità piccole di fronte a c, che intervengono nell'ordinaria meccanica (terrestre e celeste), da riportare sensibilmente alla solita legge (3) di composizione delle velocità.

Un tale programma riconobbe l'EINSTEIN essere realizzabile, anzi, in certo senso, addirittura realizzato dalla trasformazione di LORENTZ. Bastò, come già per COPERNICO di fronte al sistema tolemaico, che egli ne desse una nuova e subito avvincente interpretazione. Ma non vogliamo qui riprodurre pedissequamente nè la celebre memoria, nè le successive divulgazioni dell'EINSTEIN.

Intendiamo invece arrivare all'impostazione della relatività con metodo più elementare e diretto, nel quale ci si occupa dapprima specificamente del tempo, rinviando alla fine, come un complemento di grande interesse, ma di minore portata (tanto che scompare nella relatività generale), l'analisi del moto traslatorio e delle modificazioni che essa suggerisce anche negli apprezzamenti delle lunghezze.

Abbandono del tempo assoluto. Formula generale di composizione delle velocità.

8.— Riprendiamo per un momento le formule di trasformazione (1) del n. 5, e la interpretazione di (x,y,z) e di (x',y',z') come coordinate di un medesimo punto P, mobile rispetto a due riferimenti, ossia rispetto ai corrispondenti osservatori O ed O'. Dalle (1) si passa, per derivazione rispetto a t, alle formule (2). Queste esprimono il principio del moto relativo, semprechè la *stessa* variabile t funga da tempo per i due osservatori O ed O'. Lasciamo ora cadere la identità del tempo per i due osservatori, e introduciamo, accanto al tempo t di O, un tempo proprio t' per O', pur senza specificare il legame fra t' e t.

Per definizione, la velocità relativa $\boldsymbol{v}_r$ di P ha in tal caso le componenti $\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}$ $\left(\text{anzichè } \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}\right)$. Comunque la derivazione delle (1), tenendo presente che

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dt'}\frac{dt'}{dt}, \text{ ecc.,}$$

e ponendo per brevità

$$dt = k\,dt', \tag{4}$$

dà

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k}\frac{dx'}{dt'} + \frac{da}{dt}$$

e due analoghe, che si compendiano nella relazione vettoriale

$$\boldsymbol{v}_a = \frac{1}{k}\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}, \tag{5}$$

valida, col valore (4) *di* k, *qualunque sia la legge con cui si altera la misura del tempo, passando da un osservatore ad un altro.*

Premesse tutte queste generalità, cerchiamo ormai di preparare e rendere plausibile la rinuncia alla adozione tradizionale di un tempo assoluto, sostituendovi un altro postulato, in verità un po' meno immediato, ma pur sempre intuitivamente espressivo.

Avvenimenti elementari.

9. — Tali diremo quelli che (pur occupando un piccolo spazio e un piccolo intervallo di tempo) possono sensibilmente localizzarsi in un unico punto P dello spazio S e in un unico istante t (del tempo pan-

topico di S). Sotto l'aspetto matematico un avvenimento elementare A altro non è se non un punto della varietà a quattro dimensioni caratterizzata dalla coppia (P,t) di un punto di S, che è definito da tre coordinate, e di un istante t. Con ovvia schematizzazione potremo procurarci aspetti concreti di avvenimenti elementari considerando ad esempio: la chiusura o l'apertura di un circuito elettrico in un posto determinato; l'accensione o lo spegnimento di una lampadina; lo sparo di un'arma da fuoco; la morte di una persona; uno scontro, ecc.

Divario di due avvenimenti elementari A_1, A_2. Riflessioni preliminari.

10. — Se due avvenimenti elementari si producono entrambi in un medesimo luogo P, ma in due diversi istanti di tempo t_1 e t_2, vien fatto naturalmente (a parte le differenze qualitative che possono anche non sussistere) di considerare la differenza

$$\Delta t = t_2 - t_1, \tag{6}$$

o meglio il suo valore assoluto, $|\Delta t|$, o un numero ad esso proporzionale come un'adeguata misura dello scostamento dei due avvenimenti.

Quando si passa al caso generale di due avvenimenti $A_1(P_1,t_1)$ e $A_2(P_2,t_2)$ che si verificano non solo in tempi, ma anche in luoghi diversi, si possono manifestamente seguire criteri svariati per apprezzarne il divario. Si può primieramente prescindere dalla diversità dei luoghi e fissare l'attenzione unicamente sul $|\Delta t|$. Questa preponderanza, anzi esclusività, accordata all'elemento tempo conduce in sostanza alla concezione di un tempo non solo pantopico ma addirittura assoluto. E ne seguirebbe l'impostazione ordinaria della cinematica, nonchè più generalmente di tutta la fisica classica. Ma si può invece prestare attenzione *anche* alla diversità locale di due avvenimenti. Se ci si lasciasse guidare soltanto da analogie matematiche, si sarebbe tratti ad applicare il criterio di GAUSS, a norma del quale lo scostamento di due enti E, E' (per es. figure geometriche) caratterizzati rispettivamente da due ennuple di parametri x_i ed y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ si apprezza bene, almeno qualitativamente, mediante una funzione crescente della forma quadratica

$$\sum_1^n{}_i \, (x_i - y_i)^2$$

o di altra forma quadratica degli argomenti $x_i - y_i$, egualmente definita positiva. È così per es. che si introduce in meccanica analitica la nozione di costrizione.

L'idea è desunta dall'immagine di due punti geometrici, i quali rimangono essenzialmente distinti, a meno che non siano addirittura coincidenti.

Ma può trattarsi di enti di altro tipo, dotati di uno o più caratteri dominanti, l'eguaglianza dei quali basta ad assicurare una equivalenza che, sotto un qualche punto di vista, è veramente decisiva (l'identità apparendo invece una circostanza di poco rilievo). Tale è il caso per es. dei valori x,y dell'argomento di una generica funzione periodica f di periodo $\tilde{\omega}$. Il divario fra x ed y, da apprezzarsi in relazione ai valori che i due argomenti fanno assumere ad f, è intanto nullo quando x ed y differiscono per multipli interi di $\tilde{\omega}$, e in generale dipende unicamente dal resto della divisione di $x - y$ per $\tilde{\omega}$. Quale funzione di questo resto (se il suo valore assoluto, o il suo quadrato, o altro) meglio si presti ad una valutazione quantitativa, non è qui il caso di indagare. Ci basta aver segnalato questo esempio per trarne norma nel caso che ci interessa del divario di due avvenimenti.

Divario di due avvenimenti rispetto ad un osservatore O di S. Appartenenza cronotopica ad un medesimo raggio luminoso.

11. — Un osservatore O abbia notizia di due avvenimenti A_1 e A_2, che si producono in luoghi P_1, P_2 e istanti t_1, t_2 (in generale) diversi mediante trasmissione di segnali, emessi da P_1, P_2 negli stessi istanti

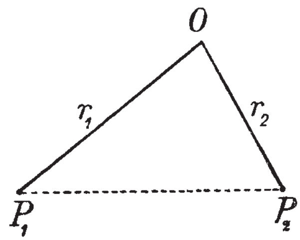

Fig. 1

t_1, t_2 in cui ivi si verificano gli avvenimenti in questione. Per i postulati (n. 4) concernenti la propagazione della luce nello spazio S, i segnali arriveranno in O negli istanti $t_1 + r_1/c$, $t_2 + r_2/c$, indicando per brevità con r_1, r_2 le distanze $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$.

Se O *non* appartiene alla retta $P_1 P_2$ (fig. 1), i segnali arrivano in O da direzioni *diverse*. Questa circostanza geometrica è già indice di un divario fra i due avvenimenti, che per il momento non cerchiamo di precisare quantitativamente.

Se invece O appartiene alla retta $P_1\,P_2$, ed è esterno al segmento $P_1\,P_2$ (fig. 2) allora i segnali luminosi, lanciati verso O dalle due posizioni P_1, P_2, pervengono all'osservatore nella medesima dire-

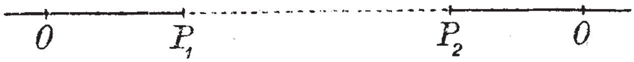

Fig. 2

zione e nel medesimo verso. La recezione avverrà anche contemporaneamente, qualora sia

$$t_1 + r_1/c = t_2 + r_2/c.$$

Diremo in tal caso che i due avvenimenti appartengono ad un medesimo *raggio cronotopico.*

Chiamando l la lunghezza del segmento $P_1\,P_2$, si ha

$$r_2 - r_1 = \pm\, l,$$

secondo che O è situato, rispetto al segmento, dalla parte di P_1 ovvero da quella di P_2. Comunque, essendosi posto $\Delta t = t_2 - t_1$, sarà, per due avvenimenti collegabili con un raggio cronotopico,

$$\Delta t \pm l/c = 0. \tag{7}$$

Passiamo ora al caso generale in cui non sia più soddisfatta la (7), e quindi i binomi

$$\Delta t + l/c, \quad \Delta t - l/c$$

siano entrambi diversi da 0.

Esaminiamo se si possa trarre da essi un qualche apprezzamento quantitativo di divario fra i due avvenimenti A_1, A_2, prescindendo ormai dall'osservatore, che può essere *qualunque*, compatibilmente con la possibilità di ricevere i due segnali secondo uno stesso raggio, per il che si richiede che stia sulla retta $P_1\,P_2$, esternamente al segmento.

All'uopo moltiplichiamo per c, onde aver a fare con lunghezze, e prendiamo in considerazione i valori assoluti dei due binomi

$$\begin{cases} \delta_1 = c\Delta t + l, \\ \delta_2 = c\Delta t - l. \end{cases} \tag{8}$$

È chiaro che quanto più discosti dallo 0 saranno simultaneamente l'uno e l'altro, tanto più rilevante dovrà risguardarsi il divario fra A_1 e A_2.

Intervallo cronotopico di due avvenimenti. Caso di due avvenimenti infinitamente vicini — ds^2 di Einstein-Minkowski.

12. — Cerchiamo di fare un passo ulteriore introducendo un criterio preciso di misura. Già abbiamo notato che $\delta_1 = 0$, ovvero $\delta_2 = 0$ rappresentano (isolatamente considerate) le condizioni sotto cui i due avvenimenti A_1, A_2 appartengono ad un medesimo raggio cronotopico, cioè appariscono contemporanei agli osservatori situati sul prolungamento del segmento $P_1 P_2$, oltre P_1, ovvero oltre P_2. Cercando ora di assurgere ad una definizione di divario fra i due avvenimenti A_1, A_2, che tenga conto di entrambe le differenze otticogeometriche δ_1, δ_2, senza attribuire all'una o all'altra di esse posizione preminente, si dovrà prendere una media. Quale? non l'aritmetica, il cui valore assoluto

$$\frac{1}{2}|\delta_1 + \delta_2| = c|\Delta t|$$

corrisponde, salvo il fattore c, alla valutazione abituale in cui si bada unicamente al tempo, senza tenere in alcun conto la eventuale diversità di luogo.

Volendo una media che faccia intervenire anche questo elemento e dia il massimo peso alla possibile contemporaneità, esigendo che si risguardi nullo il divario di due eventi A_1, A_2, ogni qualvolta essi possono essere collegati da un medesimo raggio cronotopico, vien fatto senz'altro di pensare alla *media geometrica*, o, anche più semplicemente, al prodotto

$$\delta_1 \delta_2 .$$

Questo gode appunto della proprietà di essere simmetrico rispetto a δ_1, δ_2 e di annullarsi allora e solo allora che si annulla uno dei due fattori δ_1, δ_2, il suo valore assoluto essendo funzione crescente di entrambi i valori assoluti $|\delta_1|$, $|\delta_2|$. *Si rende quindi plausibile di adottare come misura del divario di due avvenimenti il prodotto* $\delta_1 \delta_2$, *che si denomina intervallo cronotopico, o semplicemente intervallo, e che, a norma delle* (8), *ha l'espressione*

$$I = c^2(\Delta t)^2 - l^2. \tag{9}$$

In particolare, se si tratta di due avvenimenti infinitamente vicini $A(P, t)$, $A'(P', t + dt)$, designando con dl la distanza elementare $\overline{PP'}$ dei loro luoghi, l'intervallo I diviene la forma quadratica indefinita di EINSTEIN-MINKOWSKI

$$c^2dt^2 - dl^2 = ds^2. \tag{10}$$

Si ha così una genesi e una interpretazione del ds^2, che, pur non essendo così immediata e spontanea come quelle di alcune forme definite che compaiono in geometria differenziale e in meccanica classica (quadrato dell'elemento lineare, forza viva, costrizione gaussiana), ha comunque il vantaggio di implicare unicamente le nozioni geometriche e di moto rettilineo uniforme, senza far intervenire (cfr. n. 7) la più complessa analisi dei moti rigidi traslatori, analisi che, da EINSTEIN in poi, è parte integrante di tutte le esposizioni elementari, intese a giustificare il contenuto fisico della relatività, in base al risultato negativo della esperienza di MICHELSON.

Dal punto di vista metodologico va notato altresì che si resta nel campo di ragionevoli induzioni da circostanze di fatto, escludendo, anche a titolo di complemento illustrativo, il misticismo dell'immaginario. Ecco in quale senso. Se nella (10) si cambia t in ix_4, si ottiene (colla nuova variabile x_4 e cambiando segno) la forma quadratica definita positiva

$$dx_4^2 + dl^2,$$

che, interpretando dl^2 come quadrato dell'elemento lineare dell'ordinario spazio euclideo, individua la metrica, pure euclidea, di uno spazio a quattro dimensioni, avente come quarta coordinata x_4. A questa circostanza algebrica (utilissima negli svolgimenti matematici) si volle da taluno associare un significato intuitivo, considerando le sensazioni di tempo, che in realtà sono qualitativamente diverse da quelle di spazio, riducibili a queste ultime attraverso l'immaginario (durata $=$ lunghezza $\times \sqrt{-1}$), col quale artificio formale l'intervallo fra due avvenimenti assume l'ordinario aspetto di distanza di due punti. Ciò non ha evidentemente alcun senso fisico; mentre la precedente impostazione muove da constatazioni concrete, precisandole con una plausibile, se non proprio coercitiva, formula matematica.

Postulato caratteristico che assume come assoluto l'intervallo anzichè il tempo.

13. — Le considerazioni testè svolte consentono di risguardare quali ben determinate grandezze fisiche gli intervalli fra due avvenimenti, come le durate e le distanze, che ne sono del resto casi particolari; nonchè di ritenerli adeguatamente misurati dalla espressione (9), o addirittura (10), se si tratta di due avvenimenti infinitamente vicini. Ammesso questo carattere intrinseco del ds^2 che rappresenta un intervallo, ne viene che esso è, non solo *invariante* rispetto alla scelta delle coordinate di spazio e di tempo, ma anche *indipendente* da ogni eventuale osservatore, fisso o mobile che sia. Qui risiede il punto es-

senziale in cui la cinematica relativistica differisce dalla cinematica ordinaria: in questa si ammette che una stessa variabile t funga da tempo per due osservatori O ed O', comunque mobili l'uno rispetto all'altro; in relatività, si assume invece come entità autonoma, indipendente dall'osservatore, l'intervallo e non il tempo.

È appena necessario rilevare che nella scala ordinaria dei fenomeni meccanici prepondera notevolmente $c\,|\,\Delta t\,|$ su l, talchè l'invarianza dell'intervallo trae seco in via approssimativa quella di Δt, come (n. 2) nel caso di osservatori immobili entro lo spazio S; ma per fenomeni in cui $l/\Delta t$ non sia più trascurabile di fronte alla velocità c della luce, i due postulati divergono, e gli sviluppi della teoria di Einstein hanno mostrato che il postulato relativistico merita la preferenza, certi fenomeni raffinati venendo preveduti e spiegati dalla relatività, mentre non si inquadrano nella impostazione classica. Ma torniamo agli elementi, desumendo anzitutto la legge del tempo per un osservatore O', che si muova nello spazio S con data velocità $\boldsymbol{v}$.

Correlazione del tempo fra un osservatore mobile e un osservatore fisso. Limite superiore delle velocità fisicamente raggiungibili.

14. — Se un punto O' si muove nello spazio S, il suo passaggio per una posizione P ad un istante (pantopico) t è un avvenimento A; il suo passaggio, nell'istante $t + dt$, per una posizione vicinissima P^* è un secondo avvenimento A^*. Il divario dei due è rappresentato, a norma della formula (10), da

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2,$$

essendo $dl = \overline{PP^*}$. Siccome dl/dt in questo caso non è altro che il valore assoluto v della velocità di O' all'istante t, potremo anche scrivere

$$ds^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{11}$$

D'altra parte, per il postulato introdotto al n. prec., il divario dei due avvenimenti A ed A^* (passaggio del mobile per P e per P^*) è lo stesso, tanto se apprezzato nello spazio S, nel qual caso è dato dalla (11), quanto se apprezzato dall'osservatore mobile O'. Siccome, rispetto ad esso, tale intervallo concerne due avvenimenti che si svolgono nello stesso luogo (si tratta sempre di O'), così il ds suddetto costituisce, a meno del fattore c, un intervallo elementare del tempo proprio t' di O', e si ha quindi, per collegare questa variabile alla t pantopica,

$$dt' = \frac{1}{c}\, ds = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{12}$$

Il coefficiente k della formula generale

$$dt = k dt' \tag{4}$$

assume quindi, in corrispondenza al postulato di indipendenza degli intervalli dall'osservatore, la determinazione

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{13}$$

Se $v = c$ si ha in particolare $dt' = 0$, mentre $v > c$ darebbe luogo a valori immaginari. Questa incongruenza fisica si elimina solo associando al criterio di conservazione degli intervalli la veduta che *in natura nessun effettivo movimento avviene con velocità superiore a quella della luce.*

Trasformazioni di Lorentz sotto l'aspetto matematico. Avviamento alla loro ricerca diretta.

15. — Il postulato del n. 13 (assieme alle solite premesse che valgono anche per la impostazione ordinaria) contiene in germe tutta la relatività ristretta. Dal punto di vista logico, non c'è che da sviluppare le conseguenze matematiche. In particolare si deducono subito [1] le trasformazioni di Lorentz come automorfismi (trasformazioni in sè) della forma quadratica quaternaria pseudo-euclidea che rappresenta l'intervallo elementare.

Pur sotto questo aspetto matematico, si può, ben s'intende, rilevarne a posteriori il significato fisico e dare debito risalto alla loro importanza. Ma va pure osservato che in questo modo non si rispecchia nè il processo storico, nè la genesi fisica del principio di relatività.

Come si ricordò al n. 7, il fatto concreto che lo fece nascere fu l'esito negativo della esperienza di Michelson, in quanto (combinandolo con le più elementari e da tutti accettate nozioni di geometria, cinematica ed ottica) vi si attribuisca l'interpretazione seguente: la luce si propaga in linea retta con la stessa velocità c, tanto rispetto alle stelle fisse (etere), quanto rispetto ad un osservatore terrestre.

[1] Cfr. per es., *Fondamenti di Meccanica relativistica*, Bologna, Zanichelli, 1928, pp. 17-37.

Questa identità di comportamento rispetto a due osservatori in moto (sensibilmente) traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro, è bensì in contraddizione con la regola di composizione delle velocità, confermata nell'esperienza quotidiana per i moti lenti rispetto alla luce, ma è d'altra parte, come EINSTEIN rilevò per primo, una estensione, pressochè imposta da una concezione unitaria dei fenomeni naturali, del principio galileiano, a norma del quale le leggi della meccanica rimangono invariate rispetto alle traslazioni uniformi. Lo stesso principio dovrebbe in conformità verificarsi anche per le propagazioni luminose.

Ciò appunto vogliamo mettere in relazione col postulato (n. 13) di indipendenza di un generico intervallo cronotopico dal moto dell'osservatore.

Necessaria attenuazione della ordinaria nozione di moto rigido imposta dalla relatività.

16. — Riprendiamo le formule di trasformazione (1) (n. 5) che, interpretate cinematicamente, servono a collegare il movimento di un medesimo punto rispetto a due riferimenti $Oxyz$, $O'x'y'z'$, aventi gli assi ordinatamente paralleli.

Supponiamo in particolare che O' sia animato da velocità costante v in direzione dell'asse delle x, e si trovi in O per $t=0$. Sarà allora nelle (1), $a(t)=vt$, $b(t)=c(t)=0$, e quindi

$$(14)\quad \begin{cases} (14') & x = x' + vt, \\ (14'') & y = y', \quad z = z'. \end{cases}$$

Per $t=0$, x,y,z si riducono ordinatamente a x',y',z', sicchè questi ultimi si possono anche risguardare come i valori iniziali di x,y,z. Le equazioni (14″) esprimono che un punto P qualsiasi descrive una retta parallela all'asse delle x. Fissiamo per es. l'attenzione su due punti generici P_1, P_2, appartenenti entrambi all'asse suddetto ($y'=z'=0$), di ascisse iniziali x'_1, x'_2. In un istante generico t si ha dalla (14′)

$$x_1 = x_1' + vt, \quad x_2 = x_2' + vt,$$

donde per sottrazione

$$x_2 - x_1 = x_2' - x_1',$$

che esprime al modo solito la rigidità del movimento.

Rinunciando al tempo assoluto e sostituendovi (n. 13) il postulato di invariabilità degli intervalli, bisogna adottare per l'osservatore O' (e per ogni altro in quiete rispetto ad esso) in luogo di t un nuovo tempo t' legato a t (n. 14) dalla relazione differenziale

$$dt' = \frac{1}{k}\, dt \tag{4}$$

dove, a norma della (13),

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{13'}$$

avendo scritto per brevità

$$\beta = \frac{v}{c}. \tag{15}$$

La (4), integrando, porge

$$t = kt' + X, \tag{16}$$

dove X designa una costante rispetto a t', ossia una funzione di x'.

La (14') e la (16) definiscono complessivamente una trasformazione fra la coppia x,t e la coppia x',t', la quale però *non* rispetta il principio di relatività esteso alle propagazioni luminose, cioè il desiderato che moti uniformi di velocità c, nelle variabili x, t, mantengano lo stesso carattere nelle nuove variabili. Per questo è sufficiente che l'intervallo di due avvenimenti infinitamente vicini (x, t) $(x + dx, t + dt)$

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2$$

conservi la stessa forma se viene espresso per le nuove variabili, in quanto allora, da $ds^2 = 0$, cioè da $\frac{dx}{dt} = \pm c$, segue, anche nelle nuove variabili, la velocità $\pm c$.

Affinchè la forma si conservi è d'uopo intendere la rigidità in senso meno stretto, che consenta ancora la sostituzione ad x' di una variabile proporzionale $\bar{x}$ (contrazione di Lorentz). Il risguardare poi $\bar{x}$ per l'osservatore mobile, come l'analogo di x per l'osservatore fisso, equivale fisicamente ad ammettere che tutte le lunghezze subiscono una alterazione (la stessa per unità di lunghezza) nel senso del moto. Si ammette ulteriormente che in senso normale alla direzione del moto nulla si alteri, cioè che seguitino a valere le relazioni

$$y = y', \quad z = z' \tag{14''}$$

fra la seconda e la terza coordinata.

La rigidità del moto traslatorio uniforme va così intesa in un senso un po' meno restrittivo dell'abituale. Si ha ancora eguaglianza (sovrapponibilità) delle configurazioni assunte nei vari istanti dal sistema mobile, e quindi è giustificato di considerare osservatori *soli-*

dali col sistema, per es. O'. Ma tutte queste configurazioni *non* sono eguali alle corrispondenti apprezzate in S (cioè da un osservatore fisso) come segue dalle (14) che rispecchiano la cinematica ordinaria: alle configurazioni $\bar{x}$ del sistema mobile occorrerebbe ancora far subire una trasformazione affine (eliminante la contrazione nel senso del moto) per renderle sovrapponibili alle figure stesse apprezzate in S.

Ciò premesso, resta in definitiva da mostrare come si realizza effettivamente la conservazione del

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2$$

combinando (14') e (16) con la ulteriore sostituzione a x' di una conveniente variabile proporzionale $\bar{x}$. Si potrebbe porre nella (16) $X = mx'$, con m costante indeterminata, e, in entrambe le formule di trasformazione, $x' = n\bar{x}$, con n pure costante indeterminata, verificando poi materialmente che, con una conveniente scelta di m ed n, si raggiunge l'intento; ma è preferibile una più simmetrica costruzione delle formule di trasformazione, che passiamo ad esporre.

Deduzione elementare (1) della trasformazione di Lorentz in base alla condizione di relatività.

17. — Posto per brevità

$$ct = \xi, \quad ct' = \bar{\xi}, \tag{17}$$

proponiamoci di costruire una trasformazine lineare omogenea fra le due coppie di variabili ξ, x e $\bar{\xi}, \bar{x}$ in modo che risulti identicamente

$$\xi^2 - x^2 = \bar{\xi}^2 - \bar{x}^2. \tag{18}$$

Si noterà che, essendo

$$\xi^2 - x^2 = (\xi + x)(\xi - x), \quad \bar{\xi}^2 - \bar{x}^2 = (\bar{\xi} + \bar{x})(\bar{\xi} - \bar{x}),$$

ogni qualvolta si annulla uno dei due fattori del secondo membro della (18), deve pure annullarsi un fattore del primo. D'altra parte, esigendo che la trasformazione sia lineare ed omogenea, $\xi + x$ può considerarsi una combinazione lineare di $\bar{\xi}, \bar{x}$, la quale, per quanto si è rilevato or ora, deve necessariamente essere proporzionale a $\bar{\xi} + \bar{x}$, ovvero a $\bar{\xi} - \bar{x}$. Basta considerare una sola delle due even-

(1) La inserisco soltanto per completare il presente articolo. Deduzioni analoghe con svariate modalità si trovano in più lavori e libri ben noti. Mi limiterò a ricordare tra le fonti italiane una Nota della dott.[a] CLARICE MUNARI (« Rend. Acc. Lincei », vol. XXIII, 1° sem. 1914, pp. 781-787) e il volume del CASTELNUOVO, *Spazio e tempo* (Bologna, Zanichelli, 1923).

tualità, per es. la prima, perchè l'altro caso vi si riconduce, invertendo la direzione positiva delle $\bar{x}$, il che non altera la quadrica $\bar{\xi}^2 - \bar{x}^2$. Avremo pertanto

$$\xi + x = \lambda(\bar{\xi} + \bar{x}),$$

λ essendo una costante che è lecito ritenere positiva, perchè (il valore zero essendo escluso, in quanto deve trattarsi di effettiva trasformazione), qualora λ fosse negativa, si potrebbe cambiarne il segno, lasciando inalterata la forma $\xi^2 - x^2$, con uno scambio simultaneo di ξ, x, in $-\xi$, $-x$. Pertanto (salvo preliminari ed inessenziali cambiamenti di verso nelle coordinate, temporale ξ e spaziali x e $\bar{x}$) possiamo attribuire ad una delle formule della cercata trasformazione lineare l'aspetto

$$\xi + x = e^{\alpha}(\bar{\xi} + \bar{x}) \qquad (e^{\alpha} = \lambda). \tag{19}$$

Dividendo membro a mebro la (18) per quest'ultima, si ottiene

$$\xi - x = e^{-\alpha}(\bar{\xi} - \bar{x}), \tag{20}$$

che, associata alla (19), completa la cercata trasformazione lineare della quadrica $\xi^2 - x^2$ in sè.

Siccome, differenziando le (19) e (20), si traggono tra i differenziali $d\xi$, dx e $d\bar{\xi}$, $d\bar{x}$ le stesse relazioni lineari, siamo fatti certi che la trasformazione trovata conserva al $ds^2 = d\xi^2 - dx^2$ la stessa forma anche nelle nuove variabili $\bar{\xi}$, $\bar{x}$.

Eliminando $\bar{\xi}$ fra le (19) e (20), si ha

$$e^{-\alpha}(\xi + x) - e^{\alpha}(\xi - x) = 2\bar{x}, \tag{21}$$

relazione che, per $\bar{x} =$ cost., definisce x in funzione lineare di $\xi = ct$, e quindi si identifica *con la equazione di un moto uniforme*. Differenziando si ha

$$e^{-\alpha}(d\xi + dx) - e^{-\alpha}(d\xi - dx) = 0,$$

la quale, introducendo la tangente iperbolica,

$$\operatorname{tgh} \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}},$$

può essere scritta

$$\frac{dx}{d\xi} = \operatorname{tgh} \alpha.$$

Siccome $d\xi = cdt$, il primo membro non è altro che la velocità $v = \dfrac{dx}{dt}$ del moto uniforme, divisa per c, ossia β in base alla posizione (15). Vediamo così che la costante α, la quale interviene nelle formule di trasformazione (19), (20), risulta legata alla velocità (roemeriana, ossia divisa per c) β dei moti uniformi di cui si tratta dalla relazione

$$\beta = \operatorname{tgh} \alpha. \tag{22}$$

Le formule (19), (20), risolute rispetto alle variabili originarie ξ, x, assumono l'aspetto

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \cosh \alpha \cdot \bar{\xi} + \sinh \alpha \cdot \bar{x}, \\ x &= \sinh \alpha \cdot \bar{\xi} + \cosh \alpha \cdot \bar{x}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

che è una forma ben nota della trasformazione (speciale) di LORENTZ.

Per un osservatore generico del sistema mobile, $\bar{x} = \text{cost.}$, si ha dalla prima delle formule scritte, differenziando, o più generalmente prendendo differenze finite, e moltiplicando per c,

$$\Delta t = \cosh \alpha \cdot \Delta t'. \tag{24}$$

Ora dall'identità

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

segue

$$\cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 \alpha}}, \quad \sinh \alpha = \frac{\operatorname{tgh} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 \alpha}},$$

sicchè, in base alle (22) e (13), scende ulteriormente

$$\cosh \alpha = k, \quad \sinh \alpha = k\beta, \tag{25}$$

e la (24) si scrive

$$\Delta t = k \Delta t'. \tag{24'}$$

Si ritrova pertanto la correlazione dei tempi che già (almeno per le durate infinitesime) dovevamo aspettarci, a norma della formula generale (12).

La seconda delle (23) mostra che, per $\bar{\xi} = \text{cost.}$, le lunghezze Δx di segmenti fissi sono legate alle omologhe lunghezze $\Delta \bar{x}$, apprezzate dall'osservatore mobile, dalla stessa contrazione lorentziana dei tempi, cioè da

$$\Delta x = \cosh \alpha \cdot \Delta \bar{x} = k \Delta \bar{x}. \tag{26}$$

Come già si notò, la (21), che è una combinazione lineare delle due equazioni (23), definisce, per $\bar{x} = \text{cost.}$, un movimento uniforme. Alla costante $\bar{x}$ si può ovviamente attribuire un significato specifico riferendosi all'istante $t = 0$. Allora anche $\xi = ct$ si annulla, e, essendo x' il valore iniziale di x, risulta, per la prima delle (25),

$$x' = k\bar{x},$$

donde apparisce che $\bar{x}$ non è proprio l'ascissa iniziale, ma tale ascissa, cui si sia fatto subire la contrazione lorentziana. Di qui (e dalla rigidità degli ordinari moti traslatori) si ritrova la (26), ecc.

A questo punto nulla resta da aggiungere, neanche come indicazione di preferenza metodologica, a quanto abitualmente si trova nelle buone esposizioni sistematiche della relatività. Dalla trasformazione speciale si passa nel noto modo (cioè combinando con rotazioni rigide) alla trasformazione generale; si precisa la legge relativistica di composizione delle velocità; si procede alla meccanica, ecc.

Giova quindi terminare ribadendo una osservazione critica già accennata al n. 15. Ed è che il fatto fisico donde sorse la relatività einsteniana (risultato negativo dell'esperienza di Michelson), interpretato come un'estensione alla propagazione luminosa del principio galileiano di relatività meccanica, richiede una analisi approfondita e una modificazione del concetto abituale di moto rigido, logicamente assai più complessa del postulato del n. 13 concernente l'intervallo, il quale postulato non è meno elementare e comprensivo delle considerazioni intuitive con cui si suol preparare e illustrare la trasformazione di Lorentz.

La vita mi ha sempre fatto pensare a una pianta che vive del suo rizoma: la sua vera vita è invisibile, nascosta nel rizoma.

(C.G. Jung)

Rizomi rimette in circolazione lavori seminali di alcune tra le più significative voci dell'Ateneo patavino. In contesti nuovi e in continua mutazione, questi testi fondamentali aprono la strada a inattese e inesplorate costellazioni culturali.

Alla soglia della nuova meccanica.
Quattro saggi tra divulgazione e fisica matematica

In copertina: Jannis Kounellis, *Resistenza e Liberazione* (particolare), Cortile interno del Palazzo del Bo, Padova

Rizomi

Tullio Levi-Civita

ALLA SOGLIA DELLA NUOVA MECCANICA

Quattro saggi tra divulgazione e fisica matematica

PADOVA UP

PADOVA UNIVERSITY PRESS